

COLECCIÓN DIGITAL INGENIERÍA  
ELECTRÓNICA

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES  
2020



**UNIVERSIDAD DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO  
-UDI**

**AUTORES**

**Ph.D. (c) María Fernanda Rivera Sanclemente**

**REVISORES**

**Mag. Anderson Ballesteros**

**Director de Ingeniería Electrónica**

**Mag. Martha Lenis Castro Castro - Estilo**

**FACULTAD DE INGENIERÍAS  
PROGRAMA INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

JAIRO AUGUSTO CASTRO CASTRO  
Rector

MARTHA LENIS CASTRO CASTRO  
Vicerrector General

CARLOS EDUARDO PINZÓN GONZÁLEZ  
Vicerrector Académico

LINA MARGARITA HENAO GÓMEZ  
Directora de Investigaciones

JUAN CARLOS YEPES PATIÑO  
Vicerrector Administrativo y Financiero

ARMANDO ARÉVALO MURILLO  
Director de Innovación

ZULY CASTILLO YENERIS  
Directora Dpto. Ciencias Básicas, Humanas  
y Saber Pro

SERGIO RENATO AVELLANEDA  
Director Instituto de Lenguas

OLGER HERRERA SANJUAN  
Representante Docentes  
Consejo Directivo

WLADIMIR CEPEDA GÓMEZ  
Representante Docentes  
Consejo Académico

JORGE ANDRÉS LAGOS ANGARITA  
Representante Estudiantes  
Consejo Directivo

LICETH DAYHANA BARRERA AMAYA  
Representante Estudiantes  
Consejo Académico

## Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN.....	6
SABERES.....	8
<b>1. SEÑALES Y SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO.....</b>	<b>12</b>
1.1. INTRODUCCIÓN.....	12
1.1.1. <i>Definición y clasificación de señales.</i> .....	12
1.1.2. <i>Ventajas del procesado digital frente al procesado analógico.</i> .....	15
1.1.3. <i>Elementos de un sistema de procesamiento digital de señales.</i> .....	16
1.1.4. <i>Clasificación de las señales.</i> .....	17
1.2. SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO. ....	21
1.2.1. <i>Señales elementales discretas en el tiempo.</i> .....	22
1.2.2. <i>Clasificación de señales en tiempo discreto.</i> .....	26
1.2.3. <i>Manipulación de las señales en tiempo discreto.</i> .....	29
1.3. SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO. ....	33
1.3.1. <i>Diagrama de bloques de los sistemas en tiempo discreto.</i> .....	35
1.3.2. <i>Clasificación de los sistemas en tiempo discreto.</i> .....	37
1.4. SISTEMAS LINEALES DISCRETOS E INVARIANTES CON EL TIEMPO. ....	46
1.4.1. <i>Técnicas de análisis de los sistemas lineales.</i> .....	46
1.4.2. <i>Descomposición en impulsos de una señal discreta en el tiempo.</i> .....	47
1.5. CONVOLUCIÓN. RESPUESTA DE LOS SISTEMAS LTI A ENTRADAS ARBITRARIAS. ....	49
1.6. PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO Y DE LA CONVOLUCIÓN. ....	54
1.6.1. <i>Propiedad de identidad y desplazamiento.</i> .....	54
1.6.2. <i>Propiedad conmutativa.</i> .....	54
1.6.3. <i>Propiedad asociativa.</i> .....	54
1.6.4. <i>Propiedad distributiva.</i> .....	55
1.6.5. <i>Causalidad.</i> .....	56
1.6.6. <i>Estabilidad.</i> .....	57
1.6.7. <i>Sistemas LTI de duración finita e infinita.</i> .....	59
1.7. SISTEMAS LTI CARACTERIZADOS POR ECUACIONES EN DIFERENCIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES. ....	60
1.7.1. <i>Solución de las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes.</i> .....	62
<b>2. TRANSFORMADA Z.....</b>	<b>66</b>
2.1. LA TRANSFORMADA Z DIRECTA.....	66
2.2. LA REGIÓN DE CONVERGENCIA.....	66
2.2.1. <i>Propiedades de la región de convergencia de la transformada Z.</i> .....	69
2.3. TRANSFORMADA z INVERSA.....	71
2.4. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z.....	73
2.4.1. <i>Linealidad.</i> .....	73
2.4.2. <i>Desplazamiento temporal.</i> .....	73
2.4.3. <i>Cambio de escala en el dominio z.</i> .....	73
2.4.4. <i>Inversión temporal.</i> .....	75
2.4.5. <i>Diferenciación en el dominio z.</i> .....	76
2.4.6. <i>Convolución de dos secuencias.</i> .....	76
2.4.7. <i>Correlación de dos secuencias.</i> .....	77
2.4.8. <i>Multiplicación de dos secuencias.</i> .....	78
2.4.9. <i>Teorema del valor inicial.</i> .....	79
2.5. TRANSFORMADA Z INVERSA MEDIANTE FRACCIONES PARCIALES. ....	81
2.5.1. <i>Polos diferentes.</i> .....	82
2.5.2. <i>Polos de orden multiple.</i> .....	82
<b>3. MUESTREO DE SEÑALES. ....</b>	<b>85</b>

3.1.	MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES CONTINUAS EN EL TIEMPO.	85
3.2.	INTRODUCCIÓN AL MUESTREO PERIÓDICO.	88
3.3.	TEOREMA DE MUESTREO.	92
4.	TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (TDF)	94
4.1.	INTERPRETACIÓN DE LA TDF.	94
4.2.	PROPIEDADES.	94
5.	DISEÑO DE FILTROS.	96
5.1	INTRODUCCIÓN	96
5.1.1	<i>Filtros de fase lineal.</i>	96
5.1.2	<i>Ubicación de ceros.</i>	100
5.2	DISEÑO DE FILTROS FIR.	103
5.2.1	<i>Método de las ventanas.</i>	103
5.2.2	<i>Método del muestreo en frecuencia.</i>	113
5.2.3	<i>Diseño por aproximación de Tchebyshev.</i>	120
5.2.4	<i>Comparación entre los distintos métodos de diseño.</i>	121
5.3	DISEÑO DE FILTROS IIR	122
5.3.1	<i>Localización de ceros y polos para filtros IIR.</i>	123
5.3.2	<i>Método a partir de prototipos analógicos.</i>	124
5.3.3	<i>Métodos directos de diseño de filtro IIR.</i>	136
GLOSARIO		141
REFERENCIAS BLIBLIOGRÁFICAS		142

## INTRODUCCIÓN

El Programa de Ingeniería Electrónica de la Universidad de Investigación y Desarrollo – UDI presenta la cartilla **PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES Y CASOS PRÁCTICOS**, la cual hace parte de la colección de materiales creados por sus docentes e investigadores adscritos al programa de Ingeniería Electrónica en su sede de Bucaramanga, los cuales, como producto de las actividades acordadas para el desarrollo de Funciones Sustantivas (Docencia – Investigación), han desarrollado una serie de cartillas, videos, MOOC (Cursos abiertos), RED (Recursos Educativos Digitales) y talleres, como material de apoyo para los estudiantes de la UDI y la comunidad académica en general, interesados en las ciencias y tecnología.

Esta cartilla es un complemento del curso del mismo nombre, el cual ha sido diseñado como una estrategia de apoyo para los estudiantes de Ingeniería Electrónica de la UDI. La cartilla se compone de cinco unidades, en las cuales se desarrollan las siguientes temáticas:

- Unidad 1. Señales y sistemas en tiempo discreto. En ella se describe de forma básica las señales analógicas y digitales, que son ideas que están en el centro de las comunicaciones y de la medición modernas.
- Unidad 2. Transformada z. La cual convierte una señal real o compleja definida en el dominio del tiempo discreto en una representación en el dominio de la frecuencia compleja.
- Unidad 3. Muestreo de señales. Es una de las partes del proceso de digitalización de las señales, que permite tomar muestras de señales analógicas a una frecuencia o tasa de muestreo constante, para cuantificarlas posteriormente.
- Unidad 4. Transformada Discreta de Fourier. Herramienta para determinar salidas cuando las entradas son sinusoides o combinaciones de éstas. Usando esta descomposición de la señal junto con la respuesta en frecuencia se tiene una forma sencilla de determinar la salida de un sistema en estado estacionario.

- Unidad 5. Técnicas de diseño de filtros. Son sistemas que, dependiendo de las variaciones de las señales de entrada en tiempo y amplitud, realiza un procedimiento matemático sobre dicha señal, obteniéndose en la salida el resultado del procesamiento matemático.

Este material se convierte en un ejercicio de prospección, que le brindara al lector una ruta clara sobre el pasado, presente y futuro, en el variable y complejo ambiente de las señales y como se intervienen sobre ellas por medio de los sistemas.

Se espera que este trabajo sea del agrado de todos los que lo consulten y facilite el estudio en diversos campos de la Ingeniería Electrónica, proporcionando escenarios para la discusión y el análisis del quehacer de las ciencias y la tecnología

**ING. MARIA FERNANDA RIVERA SANCLEMENTE**

Docente Investigadora

Grupo GPS

## SABERES

CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
<p><b>UNIDAD 1. SEÑALES Y SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO.</b></p> <p>1.1. Introducción</p> <p>1.2. Sistemas en tiempo discreto</p> <p>1.3. Sistemas lineales invariantes con el tiempo (LTI).</p> <p>1.4. Convolución</p> <p>1.5. Propiedades de los sistemas lineales invariantes con el tiempo (LTI)</p> <p>1.6. Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica las ventajas que surgen del procesamiento digital de señales.</li> <li>Identificar y caracterizar cada una de las etapas presentes en un proceso de conversión análogo digital.</li> <li>Caracteriza sistemas LTI mediante el análisis de la función de transferencia descrita por la ecuación diferencial.</li> <li>Desarrolla el cálculo de la convolución de señales discretas mediante el uso de la ecuación de análisis.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se automotiva y se vuelve autosuficiente para dar solución a los problemas planteados.</li> <li>Asume con responsabilidad las funciones asignadas y adquiridas.</li> <li>Trabaja en equipo y acepta las diferencias con otras personas.</li> <li>Cultiva su imaginación, mediante el desarrollo creativo buscando diferentes métodos para dar solución a situaciones problemáticas de la asignatura.</li> <li>Supera con base en su trabajo las dificultades que se le presentan en el transcurso de la materia.</li> <li>Seguridad con los conocimientos adquiridos a la hora de diseñar y montar una aplicación.</li> <li>Puntualidad en la presentación de los trabajos, y de cada uno de los compromisos adquiridos</li> </ul>
<p><b>UNIDAD 2. TRANSFORMADA Z.</b></p> <p>2.1. La Transformada Z</p> <p>2.2. Introducción a la Transformada Z.</p> <p>2.3. Procesadores Digitales de señales</p> <p>2.4. Propiedades de la región de convergencia de la transformada Z</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Habilidad para obtener la transformada Z de una señal discreta utilizando la definición y/o las propiedades que esta presenta.</li> <li>Apropiación del concepto de transformada de Fourier discreta</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se automotiva y se vuelve autosuficiente para dar solución a los problemas planteados.</li> <li>Asume con responsabilidad las funciones asignadas y adquiridas.</li> </ul>

CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
<p>2.5. La transformada Z inversa</p> <p>2.6. Propiedades de la Transformada Z</p>	<p>acentuando las diferencias con la transformada Z.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpretación de las técnicas implementadas mediante algoritmos computacionales en la obtención de la transformada Z</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trabaja en equipo y acepta las diferencias con otras personas.</li> <li>• Cultiva su imaginación, mediante el desarrollo creativo buscando diferentes métodos para dar solución a situaciones problémicas de la asignatura.</li> <li>• Supera con base en su trabajo las dificultades que se le presentan en el transcurso de la materia.</li> <li>• Seguridad con los conocimientos adquiridos a la hora de diseñar y montar una aplicación.</li> <li>• Puntualidad en la presentación de los trabajos, y de cada uno de los compromisos adquiridos</li> </ul>
<p><b>UNIDAD 3. MUESTREO DE SEÑALES.</b></p> <p>3.1. Muestreo de señales en tiempo continuo</p> <p>3.2. Introducción al Muestreo Periódico</p> <p>3.3. Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia</p> <p>3.4. Reconstrucción de señales de banda limitada a partir de sus muestras</p> <p>3.5. Procesado en tiempo discreto de señales en tiempo continuo.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estudiar el muestreo ideal de señales continuas y sus efectos en el dominio de la frecuencia.</li> <li>• Analizar el proceso de reconstrucción de una señal a partir de sus muestras.</li> <li>• Relacionar señales muestreadas y señales discretas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se automotiva y se vuelve autosuficiente para dar solución a los problemas planteados.</li> <li>• Asume con responsabilidad las funciones asignadas y adquiridas.</li> <li>• Trabaja en equipo y acepta las diferencias con otras personas.</li> <li>• Cultiva su imaginación, mediante el desarrollo creativo buscando diferentes métodos para dar solución a situaciones problémicas de la asignatura.</li> <li>• Supera con base en su trabajo las dificultades que se</li> </ul>

CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
		<p>le presentan en le transcurso de la materia.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Seguridad con los conocimientos adquiridos a la hora de diseñar y montar una aplicación.</li> <li>• Puntualidad en la presentación de los trabajos, y de cada uno de los compromisos adquiridos</li> </ul>
<p><b>UNIDAD 4. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER.</b></p> <p>4.1. Transformada de Fourier</p> <p>4.2. Propiedades de la transformada de Fourier</p> <p>4.3. Transformada discreta de Fourier y Sistemas Lineales</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Habilidad para obtener la transformada de Fourier de una señal discreta utilizando la definición y/o las propiedades que esta presenta.</li> <li>• Apropiación del concepto de transformada de Fourier discreta acentuando las diferencias con la transformada de Fourier en tiempo discreto.</li> <li>• Interpretación de las técnicas implementadas mediante algoritmos computacionales en la obtención de la transformada de Fourier.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se automotiva y se vuelve autosuficiente para dar solución a los problemas planteados.</li> <li>• Asume con responsabilidad las funciones asignadas y adquiridas.</li> <li>• Trabaja en equipo y acepta las diferencias con otras personas.</li> <li>• Cultiva su imaginación, mediante el desarrollo creativo buscando diferentes métodos para dar solución a situaciones problémicas de la asignatura.</li> <li>• Supera con base en su trabajo las dificultades que se le presentan en le transcurso de la materia.</li> <li>• Seguridad con los conocimientos adquiridos a la hora de diseñar y montar una aplicación.</li> <li>• Puntualidad en la presentación de los trabajos, y de cada uno de los compromisos adquiridos</li> </ul>

CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
<p><b>UNIDAD 5. TECNICAS DE DISEÑO DE FILTROS.</b></p> <p>5.1. Introducción 5.2. Diseño de filtros FIR 5.3. Diseño de filtros IIR</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diseño de filtros digitales asistido por ordenador</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se automotiva y se vuelve autosuficiente para dar solución a los problemas planteados.</li> <li>• Asume con responsabilidad las funciones asignadas y adquiridas.</li> <li>• Trabaja en equipo y acepta las diferencias con otras personas.</li> <li>• Cultiva su imaginación, mediante el desarrollo creativo buscando diferentes métodos para dar solución a situaciones problémicas de la asignatura.</li> <li>• Supera con base en su trabajo las dificultades que se le presentan en el transcurso de la materia.</li> <li>• Seguridad con los conocimientos adquiridos a la hora de diseñar y montar una aplicación.</li> <li>• Puntualidad en la presentación de los trabajos, y de cada uno de los compromisos adquiridos</li> </ul>

# 1. SEÑALES Y SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO.

## 1.1. Introducción.

### 1.1.1. Definición y clasificación de señales.

Se define como **señal** a cualquier magnitud física que varía con el tiempo, el espacio u otra variable o variables independientes. Matemáticamente se describe como una función de una o más variables independientes. Las funciones, por ejemplo

$$\begin{aligned} S_1(t) &= 5t \\ S_2(t) &= 20t^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Estas describen dos señales, una varía linealmente en el tiempo (variable independiente  $t$ ) y la otra varía cuadráticamente con  $t$ . Otro ejemplo sería

$$s(x, y) = 3x + 2xy + 10y^2 \quad (1.2)$$

La función describe una señal de dos variables independientes  $x$  e  $y$  que representan las dos coordenadas de un plano.

Las señales descritas por las ecuaciones (1.1) y (1.2) pertenecen a una clase de señales que se definen especificando la dependencia funcional de la variable independiente. Aun que hay casos en los cuales la relación funcional es desconocida o demasiado compleja.

Por ejemplo, una señal de voz (figura 1) no se puede describir funcionalmente mediante expresiones como la ecuación (1.1). En general, un segmento de voz se puede representar con una buena precisión como la suma de varias señales sinusoidales de diferentes amplitudes y frecuencias, como:

$$\sum_{i=1}^N A_i(t) \text{sen}[2\pi F_i(t)t + \theta_i(t)] \quad (1.3)$$

Donde  $\{A_i(t)\}, \{F_i(t)\}, \{\theta_i(t)\}$  son los conjuntos de amplitudes, frecuencias y fases, respectivamente de las señales sinusoidales. Una forma de interpretar la información o el mensaje enviado en un corto segmento de tiempo de la señal de voz consiste en medir las amplitudes, frecuencias y fases contenidas en dicho segmento de la señal.

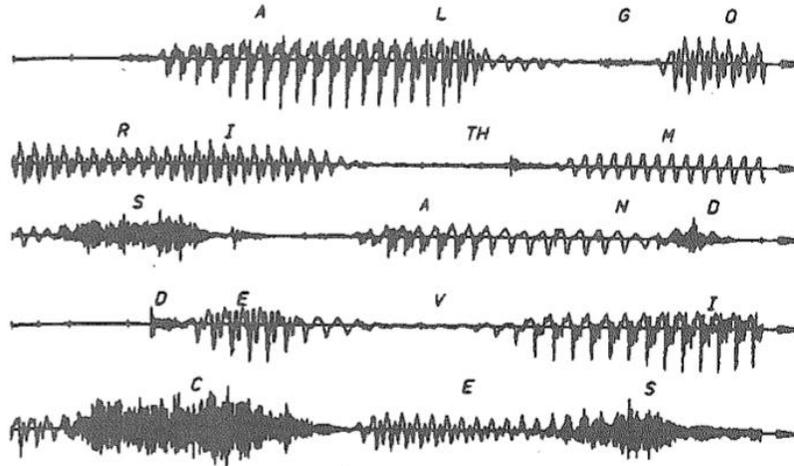


Figura 1: Señal de voz.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

Otro ejemplo de señal natural es la de un electrocardiograma (ECG). Este tipo de señal proporciona información a un médico sobre el estado del corazón de un paciente. De igual forma, la señal de un electroencefalograma (EEG) proporciona información sobre la actividad del cerebro.

Las señales anteriores son ejemplos de señales que contienen información y que varían en función de una sola variable independiente que generalmente es el tiempo. Un ejemplo de una señal que se encuentre en función de dos variables independientes es una señal de imagen. En este caso las variables independientes son las coordenadas espaciales. En el mundo real pueden encontrarse una gran cantidad de señales naturales y las mencionadas anteriormente son unos pocos ejemplos.

Además de las señales naturales hay que tener en cuenta los medios que las generan. Por ejemplo, las señales de voz se generan por el paso del aire a través de las cuerdas vocales. Las imágenes se obtienen al exponer una película fotográfica ante una escena u objeto. Por lo cual la generación de señales se asocia con un **sistema** que responde a un estímulo o fuerza. Para una señal de voz el sistema está formado por el tracto bucal y las cuerdas vocales, lo que se conoce como cavidad bucal. El estímulo en combinación con el sistema es lo que se denomina **fuentes de señal**. De modo que, existen fuentes de voz, fuentes de imágenes y muchos tipos de otros tipos de fuentes de señal.

También se puede definir a un sistema como aquel dispositivo físico que realiza una operación sobre una señal. Por ejemplo, un filtro utilizado para reducir el ruido y las interferencias que distorsionan una señal deseada que transporta información. En este caso el filtro realiza

operaciones sobre la señal, que tiene el efecto de reducir (filtrar) el ruido las interferencias de la señal de información deseada.

Al pasar la señal a través de un sistema, en este caso un filtro, se dice que se ha procesado o tratado la señal. En este caso, el procesamiento de la señal implica filtrar el ruido y las interferencias de la señal. En general el sistema se caracteriza por el tipo de operación que se realiza sobre la señal. Por ejemplo si la operación es lineal, el sistema es lineal, si la operación es no lineal se dice que el sistema es no lineal, etc. A estas operaciones se les conoce como ***tratamiento de la señal***.

Es conveniente ampliar la definición de sistema para no sólo incluir los dispositivos físicos, sino también la implementación software de operaciones sobre una señal. En el procesamiento digital de señales las operaciones efectuadas sobre una señal consisten en una serie de operaciones matemáticas especificadas por un programa (el programa representa una implementación del sistema por software). Un sistema que se implementa sobre un computador por una secuencia de operaciones matemáticas; es decir, se tiene un sistema de procesamiento digital de señales implementado por software. Por ejemplo, un computador puede programarse para llevar a cabo un filtrado digital. Alternativamente, el tratamiento de señales se puede realizar por hardware digital (circuitos lógicos) configurado para realizar operaciones específicas. En este tipo de implementación se tiene un dispositivo físico que realiza las operaciones especificadas. En un sentido amplio, un sistema digital se implementa con la combinación de hardware y software digital, donde cada uno realiza sus propias operaciones específicas.

Ya que muchas de las señales en el mundo real son analógicas, también se considerará el problema de convertir una señal analógica en una digital con el fin de poder procesarla. Las operaciones que se realizan en un sistema así se podrán especificar de forma matemática. El método o conjunto de reglas para implementar el sistema mediante un programa que realiza operaciones matemáticas correspondientes se denomina algoritmo (Proakis & Manolakis, 2007).

Hay infinidad de formas y algoritmos por los cuales se puede implementar un sistema, bien sea por software o hardware, para realizar las operaciones y cálculos deseados. En la práctica, es de interés aquellos algoritmos que sean eficientes y rápidos en lo que respecta a los cálculos, y que también sean fáciles de implementar. Por lo tanto, en el procesamiento de señales es el empleo de algoritmos para realizar operaciones como el filtrado, la correlación o el análisis de espectros.

### 1.1.2. Ventajas del procesado digital frente al procesado analógico.

- **Programabilidad/Flexibilidad:** Al tratarse de sistemas programados se facilita el cambio de los algoritmos sin necesidad de modificar el circuito como ocurre con los sistemas analógicos. Dependiendo de que la programabilidad sea en el proceso de fabricación, o a posteriori los circuitos disponen de diferentes tipos de memoria (ROM, EEPROM, RAM).
- **Repetitividad:** La memoria y la lógica de un procesador no se alteran. Procesos repetibles no influenciados por derivas térmicas, tolerancias de los componentes, no necesitan ajustes individuales. Los algoritmos de procesado son ecuaciones matemáticas por lo que su resultado no varía aunque se cambie el dispositivo (DSP, microprocesador etc.)
- **Coste:** Un sistema programado puede modificar su funcionamiento (algoritmo) sin modificar la circuitería como ocurre con los sistemas analógicos, que deben modificar el número de componentes.
- **Implementación de sistemas sin equivalente analógico:** Existen sistemas digitales sin equivalente analógico como los filtros FIR. Digitalmente se pueden generar formas de onda arbitrarias. Se pueden almacenar las señales para un procesado posterior.
- **Existencia de un gran número de herramientas de diseño:** Muchas de las tareas de procesado como la derivación de algoritmos y la obtención de fórmulas ya están hechas y existen programas como Matlab que permiten obtener los coeficientes de un filtro sin necesidad de conocer todo el desarrollo matemático subyacente. Existen herramientas que permiten automatizar el proceso casi al completo, desde el diseño hasta la programación del dispositivo sobre el que se va a ejecutar el programa. Si bien para poder utilizar todas estas herramientas es necesario conocer los fundamentos básicos del procesado.

Gracias a estas ventajas, el procesamiento digital de señales es aplicado en sistemas prácticos cubriendo un amplio rango de disciplinas. Por ejemplo, técnicas de tratamiento digital de señales en el procesamiento de voz y la transmisión de señales a través de canales telefónicos, en el procesamiento y transmisión de imágenes, en el campo de la sismología y la geofísica, en la prospección petrolífera, en la detección de explosiones nucleares, en el tratamiento de señales recibidas del espacio exterior y en muchas otras aplicaciones.

### 1.1.3. Elementos de un sistema de procesamiento digital de señales.

Gran parte de las señales con las que se trabaja en los diferentes campos de la ciencia y la ingeniería son analógicas por naturaleza. Es decir, las señales son funciones de una variable continua, como es el tiempo o el espacio y generalmente toman valores en un rango continuo. Estas señales se pueden procesar directamente por sistemas analógicos apropiados (filtros, analizadores de frecuencia o multiplicadores de frecuencia), con el fin de cambiar sus características o de extraer la información deseada. Es así, que se puede decir que la señal se ha procesado de forma directa en su forma analógica (ver figura 2). Así como la señal de entrada es analógica también lo es la señal de salida.

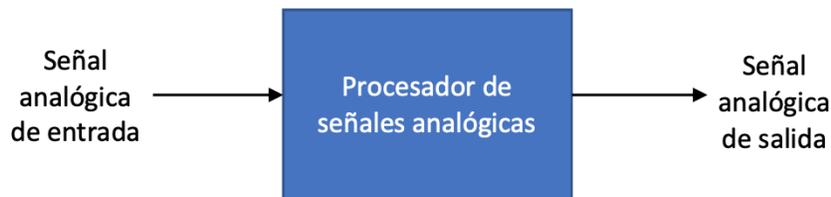


Figura 2: Tratamiento de una señal analógica.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

Se proporciona un método alternativo en el tratamiento digital de señales al procesar una señal analógica (ver figura 3). Para realizar el tratamiento digital, se necesita disponer de una interfaz entre la señal analógica y el procesador digital. Esta interfaz se conoce como *convertidor analógico-digital (A/D)*. La salida del convertidor A/D es una señal digital que es adecuada como entrada del procesador digital.

El procesador digital puede ser una computadora digital programable grande o un pequeño microprocesador programado para realizar las operaciones deseadas sobre la señal de entrada. También un procesador puede ser cableado y configurado para realizar un conjunto de operaciones específicas sobre la señal de entrada. Las máquinas programables proporcionan flexibilidad para cambiar operaciones de procesamiento de la señal mediante modificaciones de software, mientras que las máquinas cableadas son difíciles de reconfigurar. Es así como, los procesadores programables son de uso común. Al contrario, cuando las operaciones de tratamiento están definidas, una implementación cableada puede optimizarse, dando lugar a un procesador más económico y que trabaja más rápido que su contrapartida programable. En aplicaciones en las que la salida digital del procesador de señal tenga que entregarse al usuario en formato analógico, como son los sistemas de comunicación por voz, se tiene que proporcionar una interfaz entre el dominio digital y el analógico. A esta interfaz se le conoce como *convertidor digital-analógico (D/A)*. Es así, como la señal que se proporciona al usuario está en forma analógica (ver figura 3). Aunque, existen otras aplicaciones que implican el análisis de la señal, en donde la información deseada se encuentra en formato

digital y, por lo tanto, no es necesario emplear un conversor D/A. Por ejemplo, en el procesamiento de las señales de radar, la información extraída como es la posición de un avión y su velocidad, puede solamente imprimirse en un papel, en este caso no hay que hacer uso de un conversor D/A.

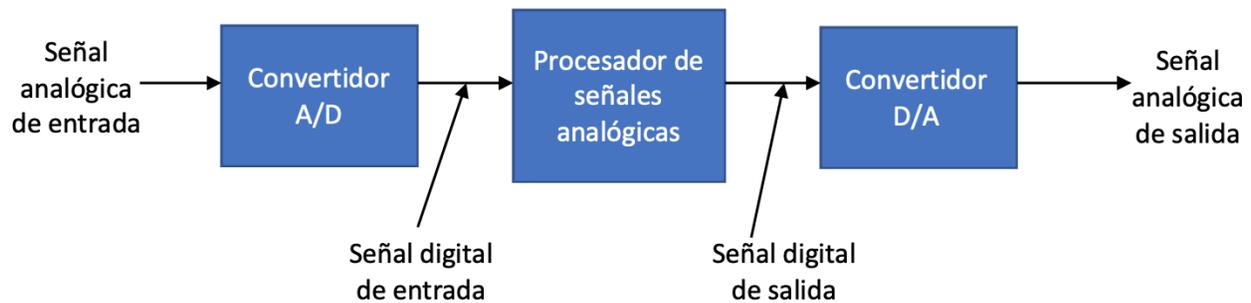


Figura 3: Diagrama de bloques de un sistema de tratamiento digital de señales.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

#### 1.1.4. Clasificación de las señales.

Los métodos para procesar una señal o analizar la respuesta de un sistema depende en gran medida de las características de la señal específica. Hay técnicas que solo se aplican a señales específicas, cualquier investigación que se realice sobre el procesamiento de señales debe comenzar por la clasificación de las señales implicadas en la aplicación concreta.

##### A. Señales multicanal y multidimensionales.

Una señal se describe mediante una función de una o más variables independientes. El valor de la función (variable independiente) puede ser una magnitud escalar ( $S_1(t) = A \sin 3\pi t$ ), una magnitud compleja ( $S_2(t) = Ae^{j3\pi t} = A \cos 3\pi t + jA \sin 3\pi t$ ) o un vector.

En algunas aplicaciones, múltiples fuentes o múltiples sensores generan las señales, estas se pueden representar de forma vectorial. La figura 4 ilustra las tres componentes de una señal vectorial donde se representa la aceleración en la superficie terrestre a causa de un terremoto. La aceleración es el resultado de tres tipos básicos de ondas elásticas.

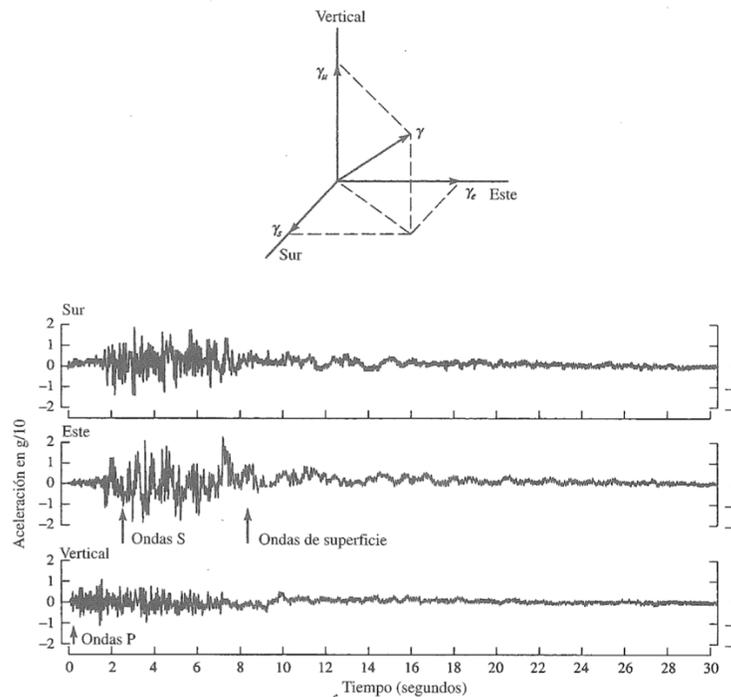


Figura 4: Tres componentes de la aceleración en tierra medida a pocos kilómetros del epicentro de un terremoto.

Fuente: (Bold, 1988)

Las ondas primarias (P) y las ondas secundarias (S) se propagan dentro del cuerpo de la roca y son longitudinales y transversales, respectivamente. El tercer tipo recibe el nombre de onda superficial, pues se propaga cerca de la superficie de la Tierra. Si  $S_k(t)$ ,  $k = 1,2,3$  denota la señal procedente del sensor  $k$  como una función del tiempo, el conjunto de  $p = 3$  señales se puede representar con un vector  $S_3(t)$ , así

$$S_3(t) = \begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \end{bmatrix}$$

El vector anterior se dice que es una **señal multicanal**. Por ejemplo en electrocardiografía, se utilizan electrocardiogramas (ECG) de 3 tomas y de 12 tomas, generando señales de 3 y 12 canales.

Notese ahora las variables independientes. Si la señal es una función de una sola variable independiente, se dice que es una **señal unidimensional**. Por otro lado, se dice que una señal es  $M - dimensional$  si su valor es una función de  $M$  variables independientes.

La figura 5 es un ejemplo de una señal bidimensional, ya que la intensidad o brillo  $I(x, y)$  en cada punto es una función de dos variables independientes. De otro lado, una imagen de televisión en blanco y negro se puede representar como  $I(x, y, t)$ , pues el brillo es una función del tiempo. Por lo tanto, la imagen de TV puede tratarse como una señal tridimensional.

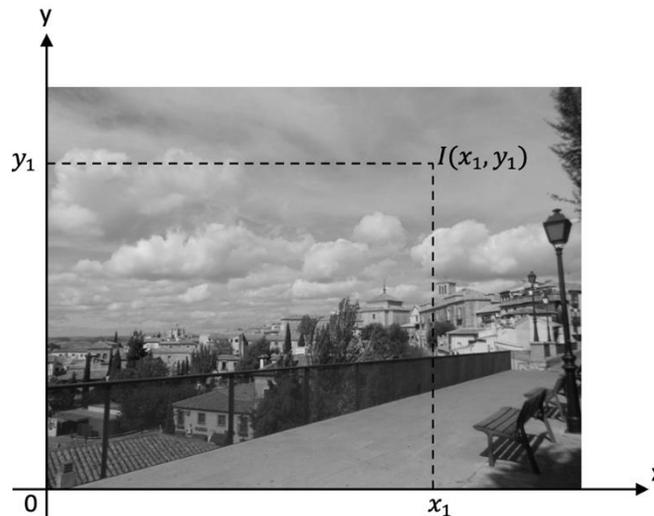


Figura 5: Señal bidimensional.

Fuente: Autor

Al contrario, una imagen de TV a color puede escribirse mediante tres funciones de intensidad de la forma  $I_r(x, y, t)$ ,  $I_g(x, y, t)$  e  $I_b(x, y, t)$  correspondiendo al brillo de los tres colores principales (rojo, verde, azul) como funciones del tiempo. Es así como, una imagen de TV en color es una señal tridimensional de tres canales, que se representa con un vector.

$$I(x, y, t) = \begin{bmatrix} I_r(x, y, t) \\ I_g(x, y, t) \\ I_b(x, y, t) \end{bmatrix}$$

## B. Señales continuas y señales discretas.

Los valores de una señal continua o discreta en el dominio del tiempo pueden ser continuos o discretos. Cuando una señal toma todos los valores posibles en un rango finito o infinito, a esta se le dice señal continua. Por otro lado si la señal toma valores dentro de un conjunto finito de posibles valores, a esta se le dice señal discreta. Generalmente los valores son equidistantes y es así que se pueden expresar como un múltiplo entero de la distancia entre dos valores sucesivos. Una señal discreta en el tiempo que tiene un conjunto de valores discretos es una **señal digital**. La figura 6 muestra una señal digital que toma uno de tres valores posibles.

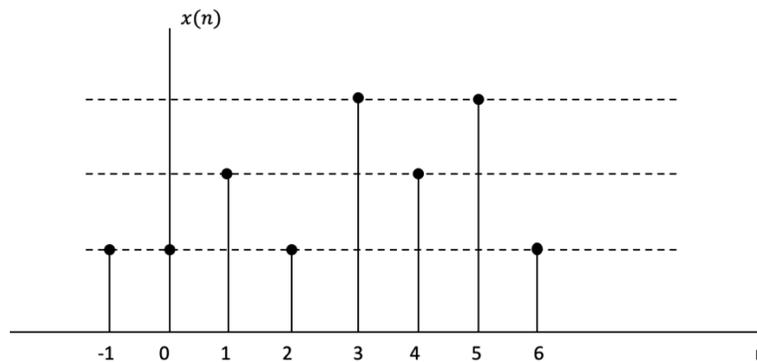


Figura 6: Señal digital con tres valores de amplitud diferentes.

Fuente: Autor.

Para que una señal pueda ser procesada digitalmente, debe ser discreta en el tiempo y sus valores tienen que ser discretos (es decir, tiene que ser una señal digital). Si la señal a procesar es analógica, esta se convierte en una señal digital muestreandola en instantes discretos de tiempo, obteniendo de esta forma una señal discreta en el tiempo y **cuantificando** a continuación sus valores en un conjunto de valores discretos. El proceso de conversión de una señal continua en una señal discreta se denomina **cuantificación** y es un proceso de aproximación, se puede realizar simplemente haciendo redondeo o truncamiento. Por ejemplo, si los valores de la señal digital son enteros (0 hasta 15), la señal de valores continuos se cuantifica empleando esos valores enteros. Por tanto, el valor de la señal 6.58 se aproximará a 6 si el proceso de cuantificación se realizara mediante truncamiento o a 7 si el proceso de cuantificación se realiza por redondeo al entero más próximo.

### C. Señales deterministas y señales aleatorias.

El análisis matemático y procesamiento de señales requiere disponer de una descripción matemática para la propia señal. Esta descripción matemática se denomina **modelo de la señal**, lo que lleva a otra clasificación de las señales. Cualquier señal se puede describir unívocamente mediante una expresión matemática explícita, una tabla de datos o una regla bien definida se dice que es **determinista**. Este término se usa para destacar que todos los valores pasados, presentes y futuros de la señal se conocen de forma precisa, sin incertidumbre.

Sin embargo, en la práctica, existen señales que no se pueden describir mediante fórmulas matemáticas o la descripción suele ser demasiado compleja. La falta de una relación de este tipo implica que estas señales evolucionan en el tiempo de forma no predecible, a estas señales se les denomina **aleatorias**. La salida de un generador de ruido, la señal sísmica de la figura 4 y la señal de voz de la figura 1 son ejemplos de señales aleatorias. El análisis teórico de las señales aleatorias lo proporciona la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos.

## 1.2. Señales en tiempo discreto.

Una señal en tiempo discreto  $x(n)$  es una función de una variable independiente que es un entero. Su representación gráfica se puede observar en la figura 7. Cabe recalcar que una señal discreta no está definida entre dos muestras sucesivas. Además, no es correcto pensar que  $x(n)$  es igual a cero si  $n$  no es un entero. Sencillamente, la señal  $x(n)$  no está definida para valores no enteros de  $n$ .

En adelante se supondrá que una señal en tiempo discreto está definida por todo valor entero  $n$  del intervalo  $-\infty < n < \infty$ . Se dice que  $x(n)$  es la muestra “n-ésima” de la señal incluso si la señal  $x(n)$  es inherentemente discreta en el tiempo (no se ha obtenido muestreando una señal analógica). Si  $x(n)$  se ha obtenido muestreando una señal analógica  $x_a(t)$ , entonces  $x(n) \equiv x_a(nT)$ , donde  $T$  es el periodo de muestreo (tiempo entre dos muestras sucesivas).

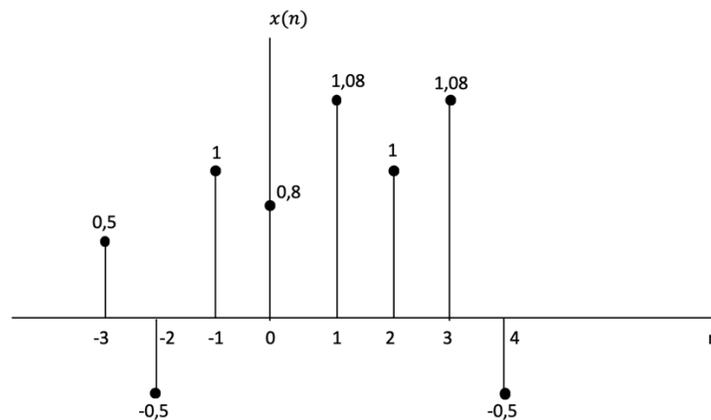


Figura 7: Señal discreta en el tiempo.

Fuente: Autor.

Además de la representación gráfica, hay disponibles otras representaciones alternativas como son:

### A. Representación funcional.

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 1,3 \\ 4, & \text{para } n = 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.4)$$

### B. Representación tabular.

$n$	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$x(n)$	...	0	0	0	1	4	1	0	0	...

### C. Representación seciencial.

Una secuencia o señal de duración infinita con origen ( $n = 0$ ) indicado por el simbolo  $\uparrow$  se representa asi:

$$x(n) = \left\{ \dots 0, \underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1, 0, 0, \dots \right\} \quad (1.5)$$

Una secuencia  $x(n)$ , que es cero para  $n < 0$ , puede ser asi:

$$x(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1, 0, 0, \dots \right\} \quad (1.6)$$

El origen de tiempos para una secuencia  $x(n)$ , que es cero para  $n < 0$ , tiene que ser el primer punto (iniciando por la izquierda) de la secuencia.

$$x(n) = \left\{ 3, -1, \underset{\uparrow}{-2}, 5, 0, 4, -1 \right\} \quad (1.7)$$

Las sañal dada en (1,7) esta formada por siete muestras o puntos (en el tiempo). De forma que se denomina o identifica como una secuencia de siete puntos.

#### 1.2.1. Señales elementales discretas en el tiempo.

A continuación se definiran algunas señales básicas que desempeñan un papel importante en el estudio sobre sistemas y señales discretas.

A. **Señal muestra unitaria** se representa como  $\delta(n)$  y se define asi

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 0 \\ 0, & \text{para } n \neq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Esta señal es cero siempre. Excepto en  $n = 0$  donde su valor es igual a la unidad, tambien es llamada impulso unitario y su representación grafica se observa en la figura 8.

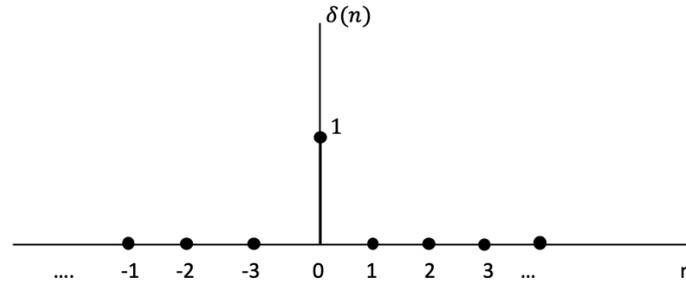


Figura 8: Representación muestra unitaria o impulso unitario.

Fuente: Autor.

B. **Señal escalon unitario**, se denota  $u(n)$  y se define asi

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Y su gráfica se ilustra en la figura 9.

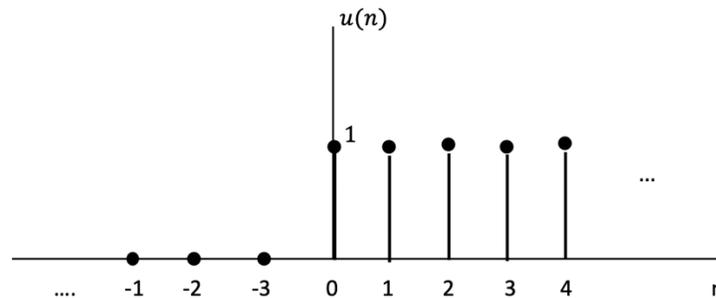


Figura 9: Representación escalón unitario.

Fuente: Autor.

C. **Señal rampa unitaria**, se denota como  $u_r(n)$  y se define asi

$$u_r(n) = \begin{cases} n, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Y su representación gráfica se muestra en la figura 10.

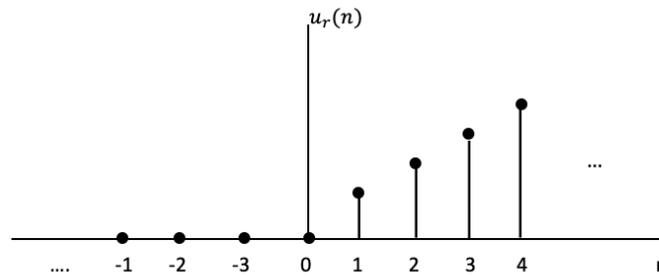


Figura 10: Señal rampa unitaria.

Fuente: Autor

D. **Señal exponencial** es una secuencia de la forma

$$x(n) = a^n \quad \text{para todo } n \quad (1.11)$$

Si el parámetro  $a$  es real, entonces  $x(n)$  es una señal real. En la figura 11 se muestran los diferentes valores para el parámetro  $a$ .

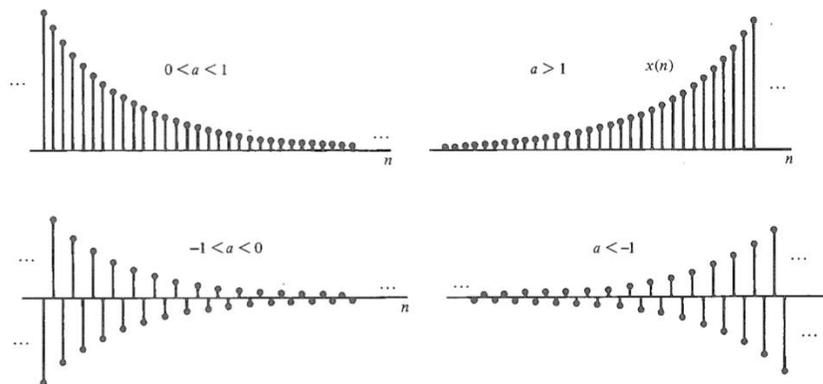


Figura 11: Señales exponenciales.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

Si el parámetro  $a$  es complejo, su expresión sería

$$a \equiv re^{j\theta}$$

Donde  $r$  y  $\theta$  son los parámetros ahora. Luego  $x(n)$  se puede expresar

$$x(n) = r^n e^{j\theta n} = r^n (\cos\theta n + j\sin\theta n) \quad (1.12)$$

Al ahora ser  $x(n)$  compleja, su representación gráfica se puede obtener dibujando la parte real

$$x_R(n) \equiv r^n \cos\theta n \quad (1.13)$$

y por separado la parte imaginaria, ambas en función de  $n$

$$x_I(n) \equiv r^n \sin\theta n \quad (1.14)$$

Alternativamente, la señal dada por (1.12) puede representarse gráficamente por la función de la amplitud

$$|x(n)| = A(n) \equiv r^n \quad (1.15)$$

Y la función para la fase

$$\angle x(n) = \phi(n) \equiv \theta n \quad (1.16)$$

La figura 12 muestra  $A(n)$  y  $\theta(n)$  para  $r = 0.9$  y  $\theta = \pi/10$ . Se puede ver que la fase es lineal con  $n$ . Aunque, la fase se define sólo en el intervalo  $-\pi < \theta < \pi$  o lo que es lo mismo  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

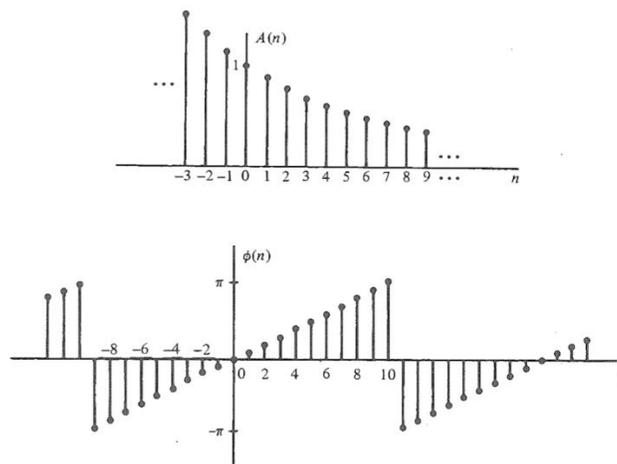


Figura 12: Gráfica de amplitud y fase de una señal exponencial compleja: a) gráfica de  $A(n) = r^n$ ,  $r = 0.9$ ; b) gráfica de  $\theta(n) = (\pi/10)n$ , módulo  $2\pi$  en el intervalo  $(-\pi, \pi]$ .

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

### 1.2.2. Clasificación de señales en tiempo discreto.

Dependiendo de las características de la señal se usaran diferentes metodos para el análisis de señales y sistemas en tiempo discreto. Las que se clasifican asi:

#### A. Señales de energía y señales de potencia.

La energía de una señal se define como

$$E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.17)$$

La energía de una señal puede ser finita o infinita. Si  $E$  es finita ( $0 < E < \infty$ ), entonces se dice que  $x(n)$  es una señal de energía.

Muchas de las señales poseen energía infinita y tienen potencia media finita. La potencia de una señal discreta se define asi

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.18)$$

Si se define la energía de la señal en un intervalo finito  $-N \leq n \leq N$  como

$$E_N = \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.19)$$

Luego se puede expresar la energía como

$$E \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} E_N \quad (1.20)$$

Y la potencia sería

$$P \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_N \quad (1.21)$$

Es asi que, si  $E$  es finita,  $P = 0$ . Al contrario, si  $E$  es infinita, la potencia  $P$  puede ser finita o infinita. Si  $P$  es finita (distinta de cero), la señal es una señal de potencia.

**Ejemplo 1.1:** Determine la potencia y la energía del escalón unitario. \_\_\_\_\_

La potencia media del escalón unitario es

$$P \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N u^2(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{N}}{2 + \frac{1}{N}} = \frac{1}{2}$$

De modo que el escalón unitario es una señal de potencia y su energía es infinita. \_\_\_\_\_

## B. Señales periódicas y aperiódicas.

Una señal es periódica de período  $N (N > 0)$  si y sólo si

$$x(n+N) = x(n) \quad \text{para todo } n \quad (1.22)$$

El valor más pequeño de  $N$  para el que (1.22) se cumple se denomina período fundamental. Si no existe ningún valor de  $N$  que satisfaga la expresión (1.22), se dice que la señal es aperiódica o que no es periódica.

Una señal sinusoidal tiene la forma

$$x(n) = A \operatorname{sen} 2\pi f_0 n \quad (1.23)$$

Es periódica cuando  $f_0$  es un número racional, es decir, si  $f_0$  puede expresarse así

$$f_0 = \frac{k}{N} \quad (1.24)$$

Donde  $k$  y  $N$  son enteros.

La energía de una señal periódica  $x(n)$  en un solo período, es decir, en un intervalo  $0 \leq n \leq N-1$ . Es finita si  $x(n)$  toma valores finitos en ese período. Sin embargo, la energía de la señal periódica para  $-\infty \leq n \leq \infty$  es infinita.

La potencia media de una señal periódica es finita e igual a la potencia media en un solo período. Por tanto, si  $x(n)$  es una señal periódica con período fundamental  $N$  y toma valores finitos, su potencia está dada por

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \quad (1.25)$$

Por lo tanto, las señales periódicas son señales de potencia.

### C. Señales simétricas (pares) y asimétricas (impares).

Una señal real  $x(n)$  se dice que es simétrica si

$$x(-n) = x(n) \quad (1.26)$$

Al contrario, una señal  $x(n)$  se dice que es asimétrica si

$$x(-n) = -x(n) \quad (1.27)$$

En la figura 13 se muestran las señales con simetría par e impar.

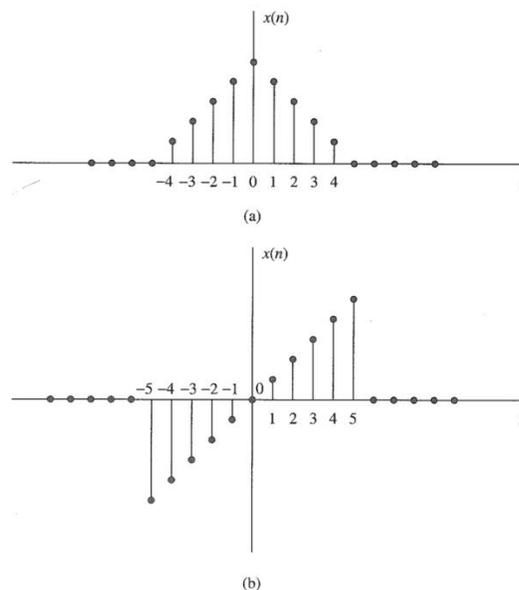


Figura 13: Señales a) pares y b) impares.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

Cualquier señal arbitraria se puede expresar como la suma de dos componentes de señal, siendo un par y la otra impar. La componente par se define sumando  $x(n)$  a  $x(-n)$  y dividiendo entre 2, así

$$x_p(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \quad (1.28)$$

De igual forma se define la componente impar por la siguiente relación

$$x_i(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \quad (1.29)$$

Ahora si se suman las dos componentes de la señal de finidas por (1.28) y (1.29) se obtendra  $x(n)$  que es

$$x(n) = x_p(n) + x_i(n) \quad (1.30)$$

Es asi que cualquier señal puede expresarse como indica la ecuación (1.30).

### 1.2.3. Manipulación de las señales en tiempo discreto.

Se veran algunas modificaciones o manipulaciones que implican a la variable independiente y la amplitu de la señal.

#### A. Transformación de la variable independiente (tiempo).

Una señal  $x(n)$  se puede desplazar en el tiempo remplazando la variable independiente  $n$  por  $n - k$ , donde  $k$  es un entero. Si  $k$  es positivo, el desplazamiento de tiempo produce un retardo de la señal en  $k$  unidades. Por otro lado. Si  $k$  es negativo. El desplazamiento de tiempo hace que la señal se adelante  $|k|$  unidades.

**Ejemplo 1.2:** La figura 14 (a) muestra una señal  $x(n)$  . Obtenga las señales  $x(n - 3)$  y  $x(n + 2)$ .

Solución:

Para obtener  $x(n - 3)$  se retarda la señal  $x(n)$  tres unidades de tiempo (ver figura 14 (b)), por otro lado, la señal  $x(n + 2)$ , se obtendra adelantando  $x(n)$  dos unidades de tiempo (ver figura 14 (c)).

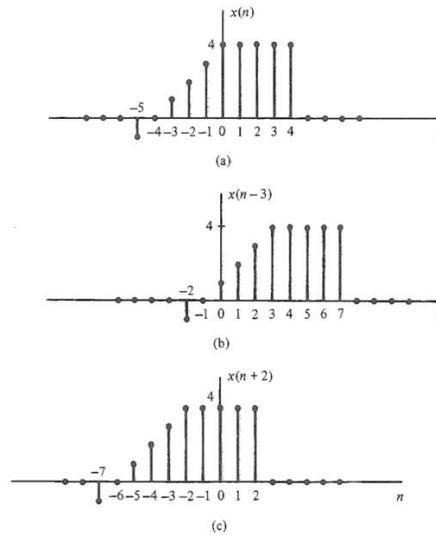


Figura 14: Señal y sus variaciones adelantada y retardada.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

Cabe notar que el retardo corresponde a un desplazamiento hacia la derecha, mientras que el adelanto es un desplazamiento hacia la izquierda a lo largo del eje de tiempo.

**Ejemplo 1.3:** Represente las señales  $x(-n]$  y  $x(-n + 2]$ , donde  $x(n]$  es la señal mostrada en la figura 15 (a).

Solución:

La nueva señal  $y(n] = x(-n]$  se observa en la figura 15(b). Notese que  $y(0) = x(0)$ ,  $y(1) = x(-1)$ ,  $y(2) = x(-2)$ , etc. Y también  $y(-1) = x(1)$ ,  $y(-2) = x(2)$ , etc. De modo que  $y(n]$  es la señal  $x(n]$  reflejada respecto al origen  $n = 0$ .

Por otro lado, la señal  $y(n] = x(-n + 2]$  es la señal  $x(-n]$  retardada dos unidades (ver figura 15 (c)).

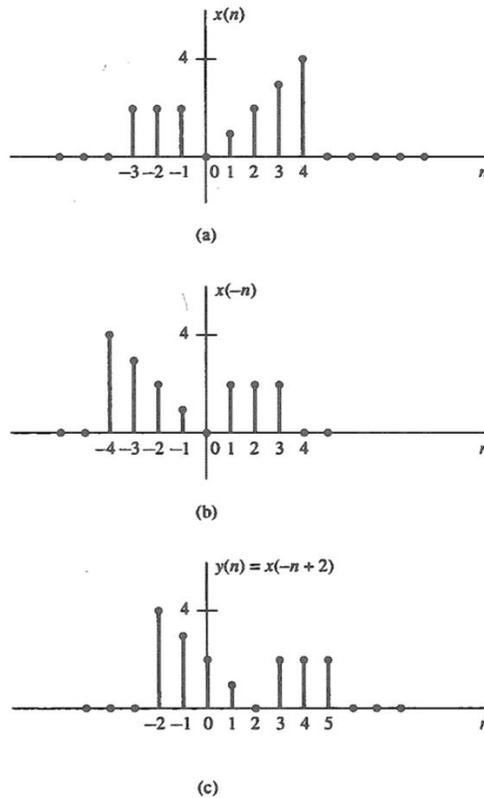


Figura 15: Operaciones de solapamiento y desplazamiento.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

Las operaciones de solapamiento y retardo (o avance) temporal de una señal no son conmutativas. Si se determina la operación de retardo en el tiempo como TD (*time-delay*) y la operación de solapamiento como FD (*folding*), se puede escribir como

$$\begin{aligned} TD_k[x(n)] &= x(n), & k > 0 \\ FD[x(n)] &= x(-n) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ahora

$$TD_k\{FD[x(n)]\} = TD_k[x(-n)] = x(-n + k) \quad (1.32)$$

Mientras que

$$FD\{TD_k[x(n)]\} = FD[x(n - k)] = x(-n - k) \quad (1.33)$$

Ya que los signos de  $n$  y  $k$  en  $x(n-k)$  y  $x(-n+k)$  son diferentes, el resultado es un desplazamiento de las señales  $x(n)$  y  $x(-n)$  hacia la derecha con  $k$  muestras, correspondientes al retardo temporal.

Una tercera modificación consiste en remplazar  $n$  por  $\mu n$ , donde  $\mu$  es un entero. Esta modificación se conoce como escalado temporal o submuestreo.

**Ejemplo 1.4:** Represente la señal  $y(n) = x(2n)$ , donde  $x(n)$  se muestre en la figura 16(a).

Solución: La señal  $y(n)$ , se obtiene de  $x(n)$  tomando cada cada dos muestras de  $x(n)$ , iniciando en  $x(0)$ . De modo que  $y(0) = x(0)$ ,  $y(1) = x(2)$ ,  $y(2) = x(4)$ , ...,  $y(-1) = x(-2)$ ,  $y(-2) = x(-4)$ , etc. Se han omitido las muestras impares y se han conservado las muestras pares. La señal resultante se puede observar en la figura 16(b).

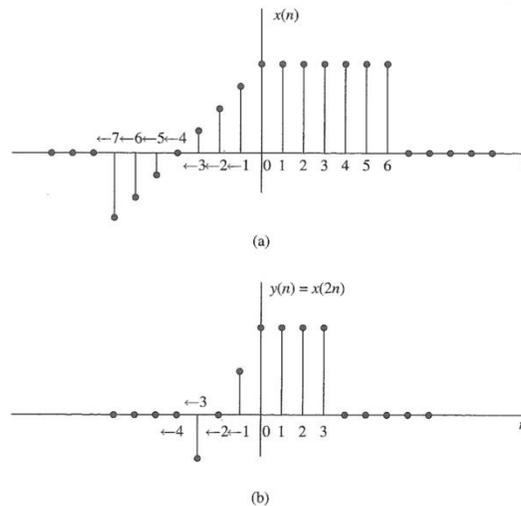


Figura 16: Operación de submuestreo.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

## B. Suma, multiplicación y cambio de escala de secuencias.

Las modificaciones de amplitud incluyen la suma, la multiplicación y el escalado de señales discretas en el tiempo.

**El escalado de amplitud** de una señal es un valor constante  $A$  que se consigue multiplicando el valor de cada muestra de la señal por  $A$ .

$$y(n) = Ax(n), \quad -\infty < n < \infty$$

La **suma** de dos señales  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  es una señal  $y(n)$ , cuyo valor en cualquier instante es igual a la suma de los valores de esas dos señales en dicho instante

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n), \quad -\infty < n < \infty$$

El **producto** de dos señales se define de manera similar en cada instante de tiempo como

$$y(n) = x_1(n)x_2(n), \quad -\infty < n < \infty$$

### 1.3. Sistemas en tiempo discreto.

Un sistema en tiempo discreto es un dispositivo o algoritmo que incide sobre una señal discreta en el tiempo, que es la entrada o excitación, de acuerdo con una regla definida producirá una señal discreta en el tiempo, que es la salida o respuesta del sistema. De forma general se dice que sistema es una operación o conjunto de operaciones que inciden sobre una señal de entrada  $x(n)$  para generar una señal de salida  $y(n)$ . De modo que el sistema transforma la señal de entrada en una señal de salida, lo que se representa así:

$$y(n) \equiv \mathfrak{S}[x(n)] \quad (1.34)$$

$$x(n) \xrightarrow{\mathfrak{S}} y(n) \quad (1.35)$$

El símbolo  $\mathfrak{S}$  indica transformación y es llamado operador o procesamiento que se realiza sobre la señal de entrada para generar la señal de salida. La relación (1.34) se puede ver en la figura

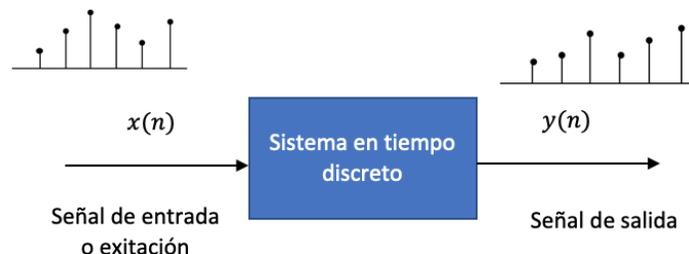


Figura 17: Diagrama de bloques de un sistema en tiempo discreto.

Fuente: Autor

**Ejemplo 1.5:** Encuentre la señal de salida de los sistemas a la señal de entrada descrita.

$$x(n) = \begin{cases} |n|, & -3 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a)  $y(n) = x(n)$  (sistema lineal)
- b)  $y(n) = x(n - 1)$  (sistema de retardo)
- c)  $y(n) = x(n + 1)$  (sistema de adelanto)
- d)  $y(n) = \frac{1}{3}[x(n + 1) + x(n) + x(n - 1)]$  (filtro del valor medio)
- e)  $y(n) = \text{mediana} \{x(n + 1), x(n), x(n - 1)\}$  (filtro de la mediana)
- f)  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) = x(n) + x(n - 1) + x(n - 2) + \dots$  (acumulador)

Solución:

Se determinan los valores para la señal de entrada

$$x(n) = \left\{ \dots, 0, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 0, \dots \right\}$$

- a) La señal de salida es exactamente igual a a la señal de entrada, este sistema se conoce como sistema identidad.
- b) La señal de salida solo se retarda una muestra

$$x(n) = \left\{ \dots, 0, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 2, 3, 0, \dots \right\}$$

- c) La señal de salida se adelanta una muestra

$$x(n) = \left\{ \dots, 0, 3, 2, 1, 0, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 0, \dots \right\}$$

- d) La salida es el valor medio de las muestras actual, anterior y posterior. Para el instante  $n = 0$  es

$$y(0) = \frac{1}{3}[x(-1) + x(0) + x(1)] = \frac{1}{3}[1 + 0 + 1] = \frac{2}{3}$$

Ampliando para todos los valores de  $n$ , la señal de salida es:

$$y(n) = \left\{ \dots, 0, 1, \frac{5}{3}, 2, 1, \underset{\uparrow}{\frac{2}{3}}, 1, 2, \frac{5}{3}, 1, 0, \dots \right\}$$

- e) Para este sistema la salida es la mediana de las tres muestras de entrada  $x(n - 1), x(n)$  y  $x(n + 1)$ . Luego su respuesta es

$$y(n) = \{0, 2, 2, 1, 1, \underset{\uparrow}{1}, 2, 2, 0, 0, 0, \dots\}$$

- f) Este sistema calcula la suma de todos los valores de entrada pasados hasta el instante actual (acumulador). Luego la salida es

$$y(n) = \{\dots, 0, 3, 5, 6, \underset{\uparrow}{6}, 7, 9, 12, 0, \dots\}$$

### 1.3.1. Diagrama de bloques de los sistemas en tiempo discreto.

Es de mucha utilidad representar los sistemas en tiempo discreto por diagramas de bloques. De forma que es necesario definir algunos bloques básicos que pueden ser interconectados para formar sistemas complejos.

**Sumador.** En la figura 18 se ilustra un sistema sumador, el cual efectúa la suma de dos secuencias para obtener otra secuencia (la suma), que se denota  $y(n)$ . Esta operación es sin memoria ya que no es necesario almacenar ninguna secuencia para realizar la operación.

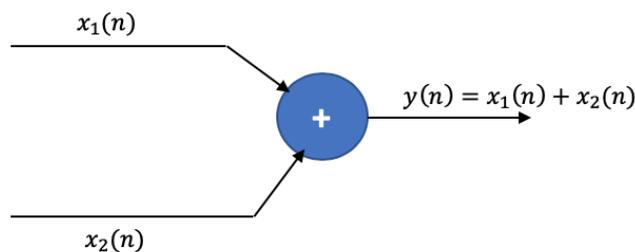


Figura 18: Sumador

Fuente: Autor

**Multiplicador por una constante.** A la señal de entrada se le aplica un factor de escala (ver figura 19). Cabe notar que también es una operación sin memoria.

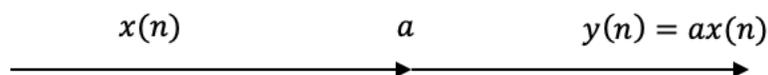


Figura 19: Multiplicación por una constante.

Fuente: Autor

**Multiplicador de señales.** La señal de salida  $y(n)$  se obtiene de realizar la multiplicación de dos secuencias, también se trata de una operación sin memoria. En la figura 20 se ilustra la operación.

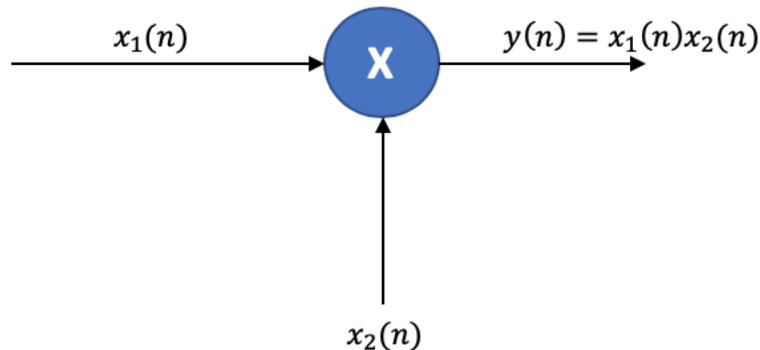


Figura 20: Multiplicador de señales.

Fuente: Autor

**Elemento de retardo unitario.** Es un sistema que hace que la señal que pasa a través de él se retarde en una muestra (ver figura 21). Si la señal de entrada es  $x(n)$  la salida será  $x(n - 1)$ . La muestra  $x(n - 1)$  se almacena en memoria en el instante  $n - 1$  y se extrae de memoria en el instante  $n$  para formar

$$y(n) = x(n - 1)$$

De modo que el bloque requiere memoria. También se puede indicar haciendo uso del símbolo  $z^{-1}$ .



Figura 21: Retardo unitario.

Fuente: Autor

**Elemento de adelanto unitario.** Un sistema de adelanto desplaza la señal de entrada una muestra hacia delante en el instante que alcanza  $x(n + 1)$  (ver figura 22). Cabe notar que cualquier avance de este tipo es físicamente imposible en tiempo real, ya que requiere conocer el comportamiento futuro de la señal. Por otro lado, si se almacenan los valores en una memoria, se podrá saber el valor de cualquier muestra en cualquier instante.



Figura 22: Adelanto unitario.

Fuente: Autor

### 1.3.2. Clasificación de los sistemas en tiempo discreto.

De acuerdo a las propiedades que satisfacen los sistemas se pueden clasificar de la siguiente manera.

**Sistemas estáticos y dinámicos.** Un sistema discreto es estático o sin memoria si su salida en cualquier instante  $n$  depende de la muestra de entrada en dicho instante, pero no de muestras pasada o futuras de la señal de entrada. En cualquier otro caso se dice que el sistema es dinámico o que tiene memoria. Si la salida de un sistema en el instante  $n$  está determinada por las muestras de entrada en el intervalo de  $n - N$  hasta  $n$  ( $N \geq 0$ ), se dice que el sistema tiene memoria de duración  $N$ . Si  $N = 0$  el sistema es estático, Si  $0 < N < \infty$ . Se dice que el sistema tiene memoria finita, mientras que si  $N = \infty$ , el sistema tiene memoria infinita.

Los sistemas a continuación son estáticos y sin memoria.

$$y(n) = ax(n) \quad (1.36)$$

$$y(n) = nx(n) + bx^3(n) \quad (1.37)$$

No hay necesidad de almacenar ninguna de las entradas o salidas anteriores para calcular la salida actual. Al contrario de los sistemas descritos por las siguientes relaciones

$$y(n) = x(n) + 3x(n - 1) \quad (1.38)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(n-k) \quad (1.39)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k) \quad (1.40)$$

Son sistemas con memoria o dinámicos. Las ecuaciones (1.38) y (1.39) describen sistemas con memoria finita, mientras que (1.40) describe un sistema con memoria infinita.

En general los sistemas estáticos o sin memoria se describe mediante ecuaciones de la forma

$$y(n) = \mathfrak{S}[x(n), n] \quad (1.41)$$

Y no incluyen elementos de retardo (memoria).

### Sistemas invariantes y variantes en el tiempo.

Un sistema es invariante en el tiempo si su característica de entrada-salida no cambia con el tiempo. Es decir, si se dispone de un sistema  $\mathfrak{S}$  en reposo y cuando se excita con una señal de entrada  $x(n)$  se genera una salida  $y(n)$ , que se puede escribir de la forma

$$y(n) = \mathfrak{S}[x(n)] \quad (1.42)$$

Ahora si la misma entrada se retarda  $k$  unidades proporcionando  $x(n-k)$ , y se aplica al mismo sistema, la característica no cambia, la salida del sistema en reposo será  $y(n-k)$ , es decir, la salida será la misma que la respuesta a  $x(n)$ , exceptuando que esta retrasada  $k$  unidades en el tiempo al igual que la entrada. De forma que se podría definir un sistema invariante en el tiempo o invariante a desplazamientos como:

**Definición:** Un sistema en reposo  $\mathfrak{S}$  es invariante en el tiempo o invariante a desplazamientos sí y sólo si

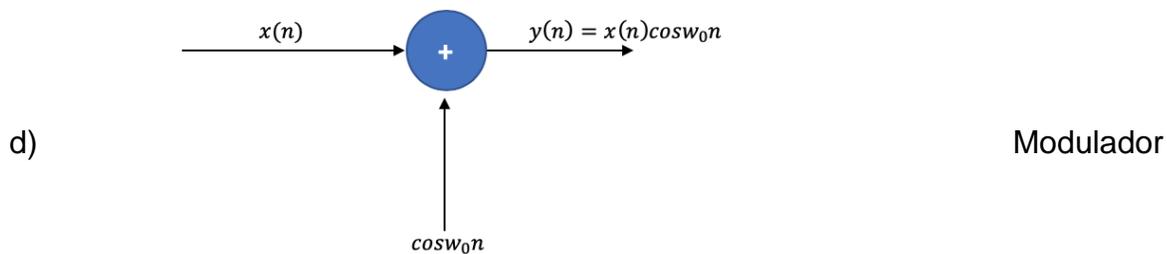
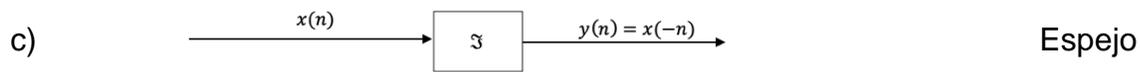
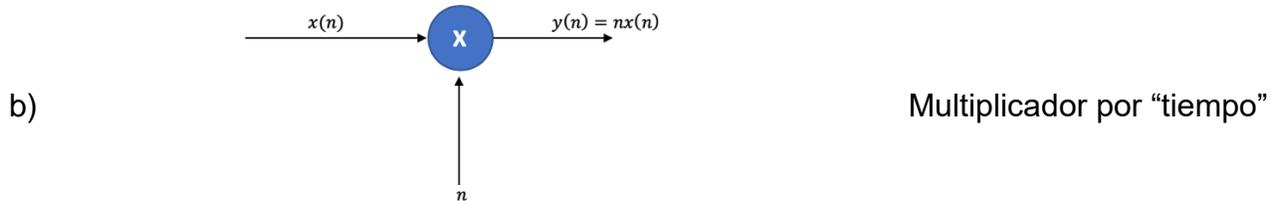
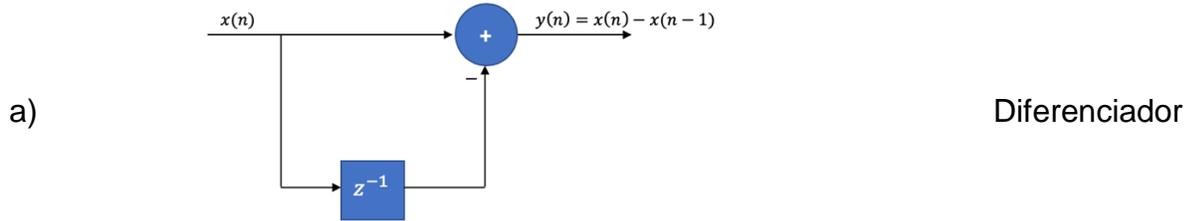
$$x(n) \xrightarrow{\mathfrak{S}} y(n)$$

Lo que implica que

$$x(n-k) \xrightarrow{\mathfrak{S}} y(n-k) \quad (1.43)$$

Para cualquier señal de entrada  $x(n)$  y cualquier desplazamiento temporal  $k$ .

Ejemplo 1.6: Diga si los sistemas son invariantes o variantes en el tiempo.



Solución:

a) El sistema se describe por las ecuaciones

$$y(n) = \mathfrak{Z}[x(n)] = x(n) - x(n - 1) \quad (1.44)$$

Ahora se retrasa la entrada  $k$  unidades y se aplica al sistema, hay que tener en cuenta el diagrama de bloques para obtener la salida la cual será

$$y(n, k) = x(n - k) - x(n - k - 1) \quad (1.45)$$

Al aplicar (1.43) la entrada se retrasa  $k$  unidades y se obtiene una salida de la forma

$$y(n - k) = x(n - k) - x(n - k - 1) \quad (1.46)$$

Ya que (1.45) y (1.46) son iguales, se deduce que  $y(n, k) = y(n - k)$ , de forma que el sistema es invariante en el tiempo.

b) La ecuación de entrada es

$$y(n) = \mathfrak{Z}[x(n)] = nx(n) \quad (1.47)$$

La respuesta del sistema  $x(n - k)$  es

$$y(n, k) = nx(n - k) \quad (1.48)$$

Al retardar la salida dada por (1.47) se obtiene

$$y(n - k) = (n - k)x(n - k) = nx(n - k) - kx(n - k) \quad (1.49)$$

Como se puede observar  $y(n, k) \neq y(n - k)$  de modo que el sistema es variante en el tiempo.

c) El sistema se describe

$$y(n) = \mathfrak{Z}[x(n)] = x(-n) \quad (1.50)$$

La respuesta del sistema a  $x(n - k)$  es

$$y(n, k) = \mathfrak{Z}[x(n - k)] = x(-n - k) \quad (1.51)$$

Al retardar la salida dada por (1.50) el resultado será

$$y(n - k) = x(-n + k) \quad (1.52)$$

d) La ecuación que describe al sistema es

$$y(n, k) = x(n) \cos w_0 n \quad (1.53)$$

Su salida al sistema  $x(n - k)$  es

$$y(n, k) = x(n - k) \cos w_0 n \quad (1.54)$$

Al retardar (1.53) el resultado es comparable con (1.54), por consiguiente, el sistema es variante en el tiempo.

### Sistemas lineales y no lineales.

Un sistema lineal es aquel que satisface el principio de superposición, el cual exige que la respuesta del sistema sea una suma ponderada de señales que es equivalente a la suma ponderada de las respuestas (salidas) del sistema a cada una de las señales individuales de entrada. Es así que se tiene la siguiente definición de linealidad.

**Definición:** Un sistema es lineal sí y sólo si

$$\mathfrak{S}[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1\mathfrak{S}[x_1(n)] + a_2\mathfrak{S}[x_2(n)] \quad (1.55)$$

Para cualquier secuencia de entrada arbitraria  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ , y cualquier constante arbitraria  $a_1$  y  $a_2$  (ver figura 23).

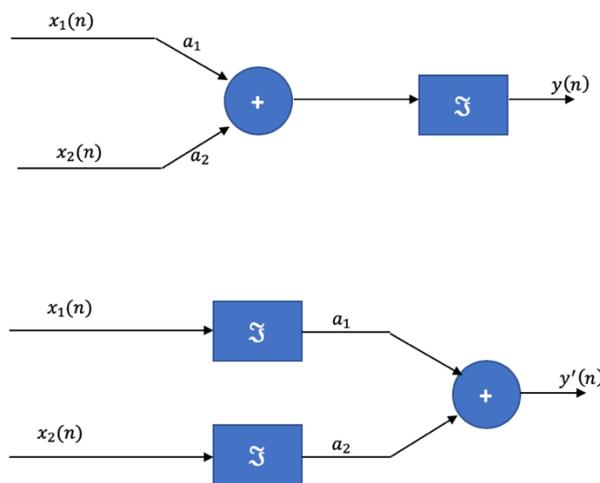


Figura 23: Principio de superposición.  $\mathfrak{S}$  es lineal sí y sólo si  $y(n) = y'(n)$

Fuente: Autor

Se debe tener en cuenta dos casos para el principio de superposición dado en la ecuación (1.55).

El primero caso es suponer que  $a_2 = 0$ , de modo que (1.55) se reduce a

$$\mathfrak{S}[a_1x_1(n)] = a_1\mathfrak{S}[x_1(n)] = a_1y_1(n) \quad (1.56)$$

Donde

$$y_1(n) = \mathfrak{S}[x_1(n)]$$

La ecuación (1.56) demuestra la propiedad o escalado de un sistema lineal. Es decir, si la entrada  $x_1(n)$  lleva a una salida  $y_1(n)$ , la respuesta a  $a_1x_1(n)$  es  $a_1y_1(n)$ . Es así que cualquier escalado a la entrada resulta en un escalado idéntico a la salida.

Para el segundo caso, se supone que  $a_1 = a_2 = 1$ , al aplicarlo a la ecuación (1.55) se tendría

$$\mathfrak{S}[x_1(n) + x_2(n)] = \mathfrak{S}[x_1(n)] + \mathfrak{S}[x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n) \quad (1.57)$$

Es así que se demuestra la propiedad de suma de un sistema lineal. La propiedad de suma y multiplicación constituyen el principio de superposición y como se aplica a los sistemas lineales.

La ecuación (1.55) se puede ampliar a cualquier combinación lineal de forma general así:

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M-1} a_k x_k(n) \xrightarrow{\mathfrak{S}} y(n) = \sum_{k=1}^{M-1} a_k y_k(n) \quad (1.58)$$

Donde

$$y_k(n) = \mathfrak{S}[x_k(n)], \quad k = 1, 2, \dots, M - 1 \quad (1.59)$$

Cabe notar que si  $a_1 = 0$  al aplicarlo a (1.56) se obtiene  $y(n) = 0$ . Es así que un sistema lineal con una entrada 0 produce una salida 0 (sistema en reposo). Si el sistema produce una salida diferente de cero al aplicar una entrada igual a cero, se dice que el sistema no es lineal o que no está en reposo.

**Ejemplo 1.7:** Para los siguientes sistemas determine si son lineales o no lineales.

- a)  $y(n) = nx(n)$
- b)  $y(n) = x(n^2)$
- c)  $y(n) = x^2(n)$
- d)  $y(n) = Ax(n) + B$
- e)  $y(n) = e^{x(n)}$

Solución:

- a) Tomando dos secuencias de entrada  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  las salidas serían

$$y_1(n) = nx_1(n) \quad (1.60)$$

$$y_2(n) = nx_2(n)$$

Una combinación lineal de las secuencias de entrada, daría una salida de la forma

$$\begin{aligned} y_3(n) &= \mathfrak{S}[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = n[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \\ &= a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n) \end{aligned} \quad (1.61)$$

De la ecuación (1.60) la combinación lineal de las salidas genera una salida

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n) \quad (1.62)$$

Ya que (1.61) y (1.62) son iguales, se dice que el sistema es lineal.

- b) Al igual que en el ejemplo (a) se obtienen las salidas por separado a las señales de entrada  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$ .

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x_1(n^2) \\ y_2(n) &= x_2(n^2) \end{aligned} \quad (1.63)$$

La salida para la combinación lineal es

$$y_3(n) = \mathfrak{S}[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1x_1(n^2) + a_2x_2(n^2) \quad (1.64)$$

De modo que la combinación lineal de las salidas dadas en (1.63)

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1x_1(n^2) + a_2x_2(n^2) \quad (1.65)$$

Comparando (1.64) y (1.65) se concluye que el sistema es lineal.

- c) La salida es el cuadrado de las entradas, estos sistemas son sistemas sin memoria.

Las salidas del sistema a las entradas por separado son

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x_1^2(n) \\ y_2(n) &= x_2^2(n) \end{aligned} \quad (1.66)$$

La combinación lineal de estas dos señales de entrada produce una salida

$$\begin{aligned} y_3(n) &= \mathfrak{S}[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = [a_1x_1(n) + a_2x_2(n)]^2 \\ &= a_1^2x_1^2(n) + 2a_1a_2x_1(n)x_2(n) + a_2^2x_2^2(n) \end{aligned} \quad (1.67)$$

al hacer la combinación lineal de (1.66)

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1x_1^2(n) + a_2x_2^2(n) \quad (1.68)$$

Como (1.67) y (1.68) no son iguales, el sistema no es lineal.

- d) Al excitar el sistema con  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  por separado, se obtienen las siguientes señales de salida

$$y_1(n) = Ax_1(n) + B \quad (1.69)$$

$$y_2(n) = Ax_2(n) + B$$

La combinación lineal de las señales de entrada genera

$$\begin{aligned} y_3(n) &= \Im[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = A[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] + B \\ &= Aa_1x_1(n) + a_2Ax_2(n) + B \end{aligned} \quad (1.70)$$

Si el sistema fuera lineal, la combinación lineal de las señales de entrada produciría una salida de la forma

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1Ax_1(n) + a_1B + a_2Ax_2(n) + a_2B \quad (1.71)$$

Y como (1.70) es diferente de (1.71), el sistema no es lineal.

- e) Si se toma  $x(n) = 0$  se tendría que su salida es  $y(n) = 1$ . Esto indica que el sistema no es lineal.

### Sistemas causales y no causales.

**Definición:** Un sistema es causal si la salida del mismo en cualquier instante  $n$  sólo depende de las entradas actuales y pasadas ( $x(n), x(n-1), x(n-2), \dots$ ) pero no depende de las entradas futuras ( $x(n+1), x(n+2), \dots$ ). Matemáticamente, la salida de un sistema causal satisface una ecuación de la forma

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \dots] \quad (1.72)$$

Donde  $F[\cdot]$  es una función arbitraria.

Si un sistema no satisface la definición se dice que es no causal.

### Sistemas estables e inestables.

**Definición:** Se dice que un sistema en reposo es un sistema estable BIBO (*Bounded Input - Bounded Output*, de entrada y salida acotadas) sí y sólo si toda entrada acotada genera una salida acotada.

Matemáticamente la secuencia de entrada  $x(n)$  y la secuencia de salida  $y(n)$  acotadas se pueden expresar estableciendo que existen determinados números finitos, como son  $M_x$  y  $M_y$  de modo que

$$|x(n)| \leq M_x < \infty, \quad |y(n)| \leq M_y < \infty \quad (1.73)$$

Para todo  $n$ . Si, para determinada secuencia de entrada acotada  $x(n)$ , la salida no se encuentra acotada (es infinita) el sistema es inestable.

**Ejemplo 1.8:** Se tiene el siguiente sistema no lineal descrito por

$$y(n) = y^2(n-1) + x(n)$$

Como señal de entrada acotada se tiene

$$x(n) = C\delta(n)$$

Donde  $C$  es una constante, se supone que  $y(-1) = 0$ , de modo que la secuencia de salida quedaria

$$y(0) = C, \quad y(1) = C^2, \quad y(2) = C^4, \quad \dots, y(n) = C^{2^n}$$

Se observa que la salida no esta acotada cuando  $1 < |C| < \infty$ , es asi que el sistema es inestable, ya que la secuencia de entrada produce una secuencia de salida no acotada.

---

## 1.4. Sistemas lineales discretos e invariantes con el tiempo.

Se han clasificado los sistemas con una serie de propiedades características: linealidad, causalidad, estabilidad e invarianza en el tiempo. Ahora se verán los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) y se demostrará que tales sistemas se caracterizan por su respuesta a una secuencia de impulsos unitarios, además cualquier señal arbitraria de entrada se puede descomponer y representar como una suma ponderada de secuencias de impulsos unitarios.

### 1.4.1. Técnicas de análisis de los sistemas lineales.

Se encuentran dos métodos que permiten analizar el comportamiento de un sistema lineal a una determinada señal de entrada. Uno está basado en la solución directa de la ecuación entrada-salida del sistema que tiene la forma

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N), x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)]$$

Donde  $F[\cdot]$  es alguna función. Para un sistema LTI la relación de entrada-salida es

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (1.74)$$

Donde  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$  son constantes específicas del sistema y son independientes de  $x(n)$  e  $y(n)$ .

El segundo método consiste en descomponer primero la señal de entrada en una suma de señales elementales, luego se usa la propiedad de linealidad. La respuesta a las señales elementales se suma para obtener la respuesta total del sistema a la señal de entrada.

Supongase que la señal de entrada  $x(n)$  se descompone en la suma ponderada de componentes elementales de la forma

$$x(n) = \sum_k C_k x_k(n) \quad (1.75)$$

Donde los  $\{C_k\}$  son el conjunto de amplitudes (coeficientes de ponderación) de la descomposición de la señal de entrada. Ahora se supondrá que la salida del sistema es  $y_k(n)$ .

$$y_k(n) \equiv \mathfrak{F}[x_k(n)] \quad (1.76)$$

La respuesta total es

$$y(n) = \mathfrak{S}[x(n)] = \mathfrak{S}\left[\sum_k C_k x_k(n)\right] = \sum_k C_k \mathfrak{S}[x_k(n)] = \sum_k C_k y_k(n) \quad (1.77)$$

Por ejemplo si la señal de entrada es periódica con período  $N$ , un conjunto de las señales elementales podría ser el de las exponenciales

$$x_k(n) = e^{jw_k n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (1.78)$$

Las frecuencias están armónicamente relacionadas

$$w_k = \left(\frac{2\pi}{N}\right)k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (1.79)$$

La frecuencia fundamental es  $2\pi/N$  y todas las componentes de frecuencia más altas son múltiplos de la frecuencia fundamental.

#### 1.4.2. Descomposición en impulsos de una señal discreta en el tiempo.

Se dispone de una señal arbitraria  $x(n)$ , que se desea descomponer en una suma de impulsos unitarios, se seleccionan las señales elementales  $x_k(n)$  obteniéndose

$$x_k(n) = \delta(n - k) \quad (1.80)$$

Donde  $k$  es el retardo de la secuencia de impulsos.

Ahora se multiplican las dos secuencias  $x(n)$  y  $\delta(n - k)$ , a excepción que  $n = k$  (es igual a uno) siempre  $\delta(n - k)$  es cero, como se aprecia en la figura 24. De modo que

$$x(n)\delta(n - k) = x(k)\delta(n - k) \quad (1.81)$$

Si se repite la multiplicación para un retardo diferente como  $m$  ( $m \neq k$ ), el resultado será una secuencia de ceros excepto en  $n = m$ , donde toma el valor de  $x(m)$ . Luego

$$x(n)\delta(n - m) = x(m)\delta(n - m) \quad (1.82)$$

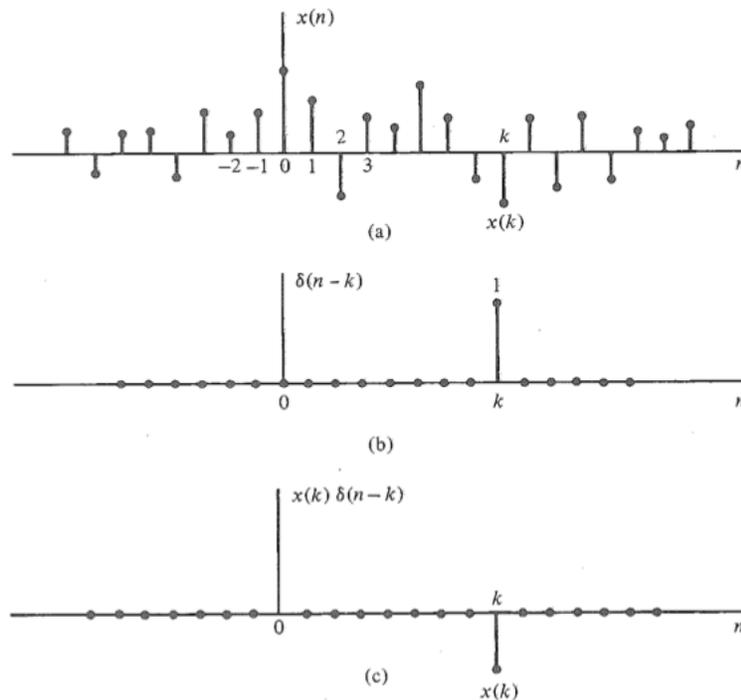


Figura 24: Multiplicación de la señal por un impulso unitario desplazado.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

Cada multiplicación es un impulso unitario desplazado un cierto  $k$  ( $\delta(n - k)$ ), si se repite la multiplicación para todos los posibles desplazamientos,  $-\infty < k < \infty$  y se suman todos los productos, el resultado se ra una secuencia

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) \quad (1.83)$$

El lado derecho de la ecuación (1.83) es la sumatoria de un número infinito de impulsos unitarios desplazados, donde el impulso unitario  $\delta(n - k)$  tiene una amplitud  $x(k)$ . Es así que el lado derecho de la ecuación es la descomposición de cualquier señal arbitraria  $x(n)$  en una suma ponderada (escalada) de impulsos unitarios desplazados.

## 1.5. Convolución. Respuesta de los sistemas LTI a entradas arbitrarias.

Luego de descomponer la señal arbitraria de entrada en la suma ponderada de impulsos, se podrá encontrar la respuesta de cualquier sistema lineal en reposo a cualquier señal de entrada.

Primero se designa la salida  $y(n, k)$  del sistema al impulso unitario de entrada en  $n = k$  por el símbolo especial  $h(n, k)$ ,  $-\infty < k < \infty$ . Es decir

$$y(n, k) \equiv h(n, k) = \mathfrak{F}[\delta(n - k)] \quad (1.84)$$

De la ecuación (1.84)  $n$  es el índice de tiempo y  $k$  es el parámetro que indica la posición del impulso de entrada, al variar la entrada en una cantidad  $C_k \equiv x(k)$ , la escala de la salida del sistema varirá en la misma magnitud de forma

$$C_k h(n, k) = x(k) h(n, k) \quad (1.85)$$

Finalmente, si la entrada es la señal arbitraria expresada como una suma ponderada de impulsos así

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k) \quad (1.86)$$

La respuesta del sistema será la suma ponderada de las salidas ponderadas, así

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathfrak{F}[x(n)] = \mathfrak{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \mathfrak{F}[\delta(n - k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n, k) \end{aligned} \quad (1.87)$$

La expresión (1.87) cumple la propiedad de superposición de sistemas lineales y se conoce como sumatoria de super posición.

Para la expresión (1.87) se usó la propiedad de linealidad, pero no la propiedad de invarianza, ya que se puede aplicar a cualquier sistema lineal (e invariante en el tiempo) en reposo.

La ecuación (1.87) se simplificaría notablemente si además el sistema es invariante en el tiempo. De hecho, la respuesta del sistema LTI al impulso unitario se denotaría como

$$h(n) \equiv \mathfrak{F}[\delta(n)] \quad (1.88)$$

Luego aplicando la propiedad de invarianza, la respuesta del sistema sería

$$h(n - k) = \mathfrak{F}[\delta(n - k)] \quad (1.89)$$

Es así que (1.87) se reduce a

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k) \quad (1.90)$$

La ecuación (1.90) proporciona la salida  $y(n)$  del sistema LTI como una función de la señal de entrada  $x(n)$  y de la respuesta al impulso  $h(n)$  la que se denomina convolución. Se dice que la señal de entrada se convoluciona con la respuesta al impulso  $h(n)$  para dar como resultado la salida  $y(n)$ .

El procedimiento matemático se inicia determinando la salida del sistema en un determinado instante de tiempo, como sería  $n = n_0$ , al reemplazar en la ecuación (1.90) se tendría

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0 - k) \quad (1.91)$$

La primera observación sería que el índice de la sumatoria es  $k$ , de modo que tanto la entrada como la respuesta al impulso son funciones de  $k$  ( $x(k), h(n_0 - k)$ ). En segundo lugar, las secuencias  $x(k)$  y  $h(n_0 - k)$  se multiplican para formar la salida  $y(n_0)$  que es la suma de todos los productos. La secuencia  $h(n_0 - k)$  se obtiene al reflejar primero  $h(k)$  respecto de  $k = 0$  (el origen de tiempos), dando como resultado la secuencia  $h(-k)$ , luego la secuencia reflejada se desplaza  $n_0$  para proporcionar  $h(n_0 - k)$ . En resumen, el proceso de convolución entre  $x(k)$  y  $h(k)$  sigue los siguientes pasos:

1. **Reflexión:** Se refleja  $h(k)$  respecto a  $k = 0$  para obtener  $h(-k)$ .
2. **Desplazamiento:** Se desplaza  $h(-k)$  una cantidad  $n_0$  hacia la derecha (positivo) o a la izquierda (negativo), para obtener  $h(n_0 - k)$ .
3. **Multiplicación:** Se multiplica  $x(k)$  por  $h(n_0 - k)$  para obtener el producto  $v_{n_0}(k) \equiv x(k)h(n_0 - k)$ .
4. **Suma:** Se suman todos los valores del producto  $v_{n_0}(k)$  para obtener el valor de la salida en el instante  $n = n_0$ .

De forma general hay que evaluar la respuesta del sistema en todos los instantes de tiempo del intervalo  $-\infty < n < \infty$ , es así que el paso 2 a 4 debe repetirse para todos los valores del intervalo.

Se utilizará el asterisco (\*) como notación para referirse a la convolución así

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (1.92)$$

**Ejemplo 1.9:** La respuesta al impulso de un sistema LTI es

$$h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\} \quad (1.93)$$

Para la siguiente señal de entrada, encuentre la salida del sistema

$$x(n) = \{1, 2, 3, 1\} \quad (1.94)$$

Solución:

Se calculará la convolución haciendo uso de la ecuación (1.90). La figura 25 se ven la señal de entrada  $x(k)$  y la respuesta al impulso  $h(k)$  del sistema,  $k$  es el índice de tiempos.

Primer paso: Se refleja  $h(k)$  (figura 25 (a)), en la figura 25 (b) se observa la secuencia reflejada  $h(-k)$ , seguidamente se calcula la salida en  $n = 0$  aplicando la ecuación (1.90)

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) \quad (1.95)$$

Como  $n = 0$  se usa  $h(-k)$  sin desplazarla, es así que el producto sería (figura 25 (b))

$$v_0(k) \equiv x(k)h(-k) \quad (1.96)$$

Finalmente, la suma de todos los términos es

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_0(k) = 4$$

Se sigue evaluando la respuesta del sistema en  $n = 1$  según (1.90)

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) \quad (1.97)$$

$h(1-k)$  es la secuencia  $h(-k)$  desplazada a la derecha una unidad (ver figura 25 (c)). El producto es

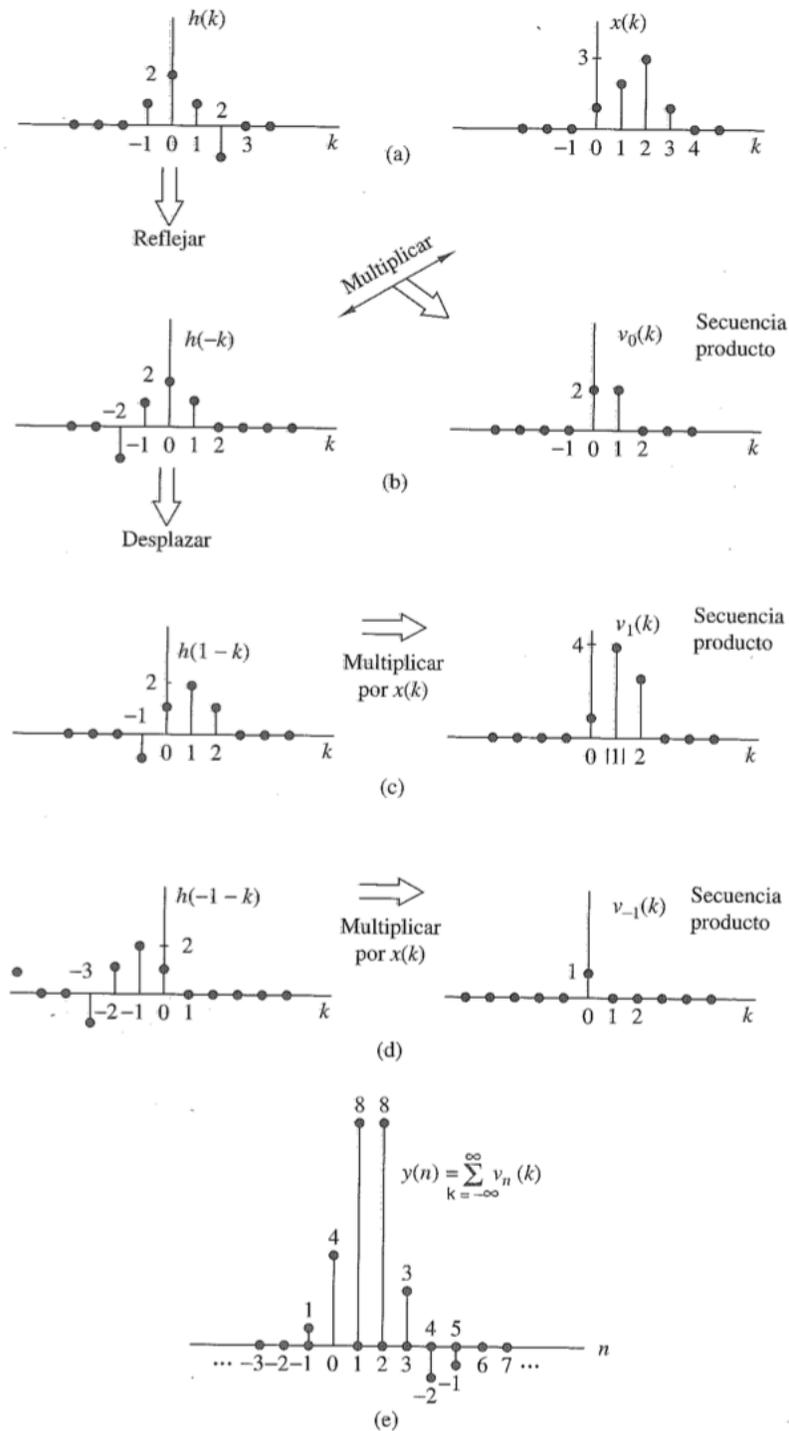


Figura 25: Convolución método gráfico  
Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

$$v_1(k) = x(k)h(1 - k) \quad (1.98)$$

La suma de los valores es

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_1(k) = 8$$

De la misma forma se obtienen  $y(2)$  desplazando  $h(-k)$  y la secuencia producto  $v_2(k) = x(k)h(2 - k)$  y la suma de todos los terminos es  $y(2) = 8$ . Para  $y(3) = 3, y(4) = -2, y(5) = -1$  para los demas terminos el producto es cero. De esta forma se obtiene  $y(n)$  para  $n > 0$ .

Para lo obtener los valores de  $y(n)$  para  $n < 0$ , se inicia con  $n = -1$

$$y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-1 - k) \quad (1.99)$$

$h(-1 - k)$  es la secuencia reflejada y desplazada hacia la izquierda (ver figura 25 (d)), al sumar todos los valores se obtiene

$$y(-1) = 1$$

La secuencia producto hacia la izquierda da como resultado siempr cero por tanto

$$y(n) = 0 \quad \text{para } n \leq -2$$

La respuesta total del sistema para  $-\infty < n < \infty$ , es

$$y(n) = \{ \dots, 0, 0, 1, 4, 8, 8, 3, -2, -1, 0, 0, \dots \} \quad (1.100)$$

## 1.6. Propiedades de los sistemas lineales invariantes en el tiempo y de la convolución.

### 1.6.1. Propiedad de identidad y desplazamiento.

El impulso unitario  $\delta(n)$  es el elemento identidad de la convolución así

$$y(n) = x(n) * \delta(n) = x(n)$$

Si se desplaza  $\delta(n)$   $k$  unidades, la convolución también se desplaza

$$x(n) * \delta(n - k) = y(n - k) = x(n - k)$$

### 1.6.2. Propiedad conmutativa.

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \tag{1.101}$$

Lo que también se puede expresar

$$y(n) = h(n) * x(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n - k) \tag{1.102}$$

$$y(n) = x(n) * h(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k) \tag{1.103}$$

### 1.6.3. Propiedad asociativa.

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \tag{1.104}$$

#### 1.6.4. Propiedad distributiva.

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \quad (1.105)$$

Esta propiedad físicamente indica que si hay dos sistemas LTI con respuesta al impulso  $h_1(n)$  y  $h_2(n)$  excitados con una misma señal de entrada, se podrá sumar las dos excitaciones y se comportará igual como si fuera un sistema global

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

El sistema es una combinación en paralelo de los dos sistemas LTI (ver figura 26)

De forma general se podrían conectar múltiples sistemas  $L$  con respuestas al impulso  $h_1(n), h_2(n), \dots, h_L(n)$ , excitados a la misma señal de entrada de la forma

$$h(n) = \sum_{j=1}^L h_j(n) \quad (1.106)$$

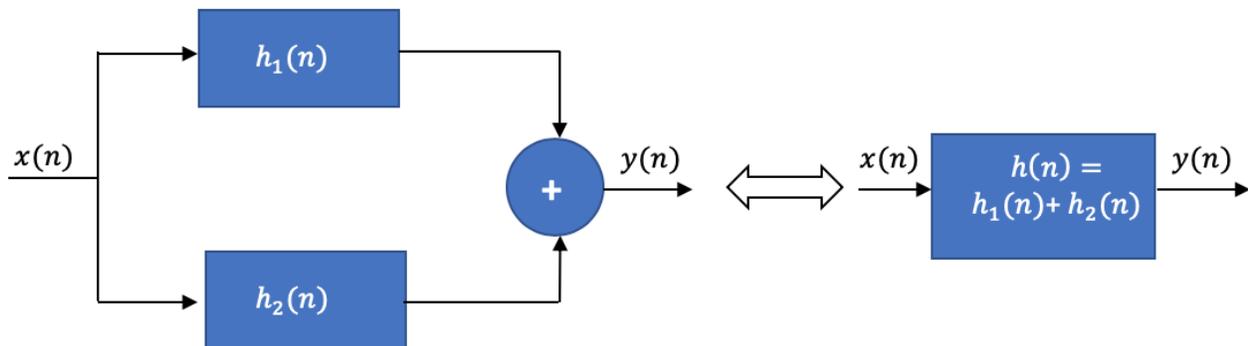


Figura 26: Propiedad distributiva de la convolución. Dos sistemas LTI conectados en paralelo.

Fuente: Autor

### 1.6.5. Causalidad.

Se ha definido un sistema causal como aquel que su salida sólo depende de las entradas actuales y pasadas, pero no de las entradas futuras. Es decir, la salida del sistema en un instante  $n = n_0$ , sólo depende de los valores de  $x(n)$  para  $n \leq n_0$ .

La causalidad se puede ver como una condición que debe satisfacer la respuesta al impulso. Hay que considerar la ecuación de convolución en un instante  $n = n_0$  de la siguiente forma

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$

Se divide la suma en dos conjuntos, uno son todos los valores pasados y presentes de la entrada ( $x(n)$  para  $n \leq n_0$ ) y el otro todos los valores futuros de la entrada ( $x(n)$  para  $n > n_0$ ), de modo que se tiene

$$\begin{aligned} y(n_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0 - k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0 - k) \\ &= [h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0 - 1) + h(2)x(n_0 - 2) + \dots] \\ &\quad + [h(-1)x(n_0 + 1) + h(-2)x(n_0 + 2) + \dots] \end{aligned}$$

Los elementos de la primera suma son  $x(n_0), x(n_0 - 1), \dots$  valores actuales y pasados de la señal de entrada, la segunda suma los elementos  $x(n_0 + 1), x(n_0 + 2), \dots$ , Ahora la salida solo dependerá de los valores pasados y actuales lo cual debe satisfacer la condición

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \tag{1.107}$$

$h(n)$  es la respuesta al impulso unitario de un sistema LTI en reposo y la condición es necesaria y suficiente para la causalidad.

***Un sistema LTI es causal si y sólo si su respuesta al impulso es cero para los valores negativo de  $n$ .***

Es así que se puede deducir dos formas:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n - k) \tag{1.108}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) \quad (1.109)$$

### 1.6.6. Estabilidad.

Esta propiedad es una de las prioridades al momento de la implementación práctica de un sistema. Se ha definido que un sistema arbitrario en reposo es un sistema estable BIBO (entrada y salida acotadas) si y sólo si su secuencia de salida está acotada para toda entrada acotada. De modo que

Si  $x(n)$  está acotada, hay una constante  $M_x$  lo que indica

$$|x(n)| \leq M_x < \infty$$

Igualmente, la salida está acotada, existe una constante  $M_y$

$$|y(n)| < M_y < \infty \quad \text{para todo } n$$

Las implicaciones de la estabilidad sobre un sistema se pueden ver al hacer uso de la fórmula de convolución (1.108).

Se inicia tomando valor absoluto a ambos lados

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right|$$

El valor absoluto de la suma siempre es menor o igual a la suma de los términos individuales

$$|y(n)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

Al estar la entrada acotada se obtendría

$$|y(n)| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

La expresión anterior lleva a concluir que la respuesta al impulso está acotada, quedando

$$S_h \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (1.110)$$

**Un sistema LTI es estable si su respuesta al impulso es absolutamente sumable.**

**Ejemplo 1.10:** Para que valores del parámetro  $a$  el sistema LTI con respuesta al impulso dado es estable.

$$h(n) = a^n u(n)$$

Solución:

Es sistema dada es causal, luego hay que determinar si es absolutamente sumable con (1.110) de modo que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1 + |a| + |a|^2 + \dots$$

Esta serie converge dando como resultado

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1 - |a|}$$

Si  $|a| < 1$ , converge en caso contrario diverge, por tanto el sistema es estable.

---

### 1.6.7. Sistemas LTI de duración finita e infinita.

Para los sistemas también hay que tener en cuenta la duración de la respuesta al impulso, del cual se tienen dos tipos:

#### 1. Respuesta al impulso de duración finita (FIR, *finite duration impulse response*).

Un sistema FIR tiene una respuesta al impulso que es cero fuera de determinado intervalo finito, de modo que

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad \text{y} \quad n \geq M$$

la convolución se reduce

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

El sistema simplemente pondera, con los valores de la respuesta al impulso  $h(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, M-1$ , las muestras más recientes y sumando los  $M$  productos resultantes. Implicando que actúa como una ventana solo viendo las muestras de la señal de entrada recientes para formar la salida, despreciando las muestras anteriores ( $x(n-M)$ ,  $x(n-M-1)$ , ...). El sistema FIR tiene memoria finita de  $M$  muestras.

#### 2. Respuesta al impulso de duración infinita (IIR, *infinite duration impulse response*).

Para el sistema IIR la fórmula de convolución es

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

La suma de las muestras implica los valores presentes y pasados, se dice que el sistema tiene una memoria infinita.

## 1.7. Sistemas LTI caracterizados por ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes.

La ecuación de un sistema recursivo de primer orden se define de la forma

$$y(n) = ay(n - 1) + x(n) \quad (1.111)$$

Siendo  $a$  una constante. En el afigura 27 se observa como se representa un sistema recursivo en diagrama de bloques.

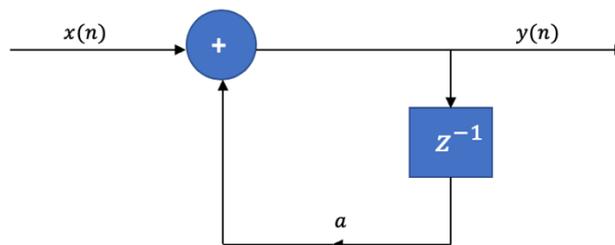


Figura 27: Representación en diagrama de bloques de un sistema recursivo.

Fuente: Autor

Ahora se aplica una señal de entrada al sistema para  $n \geq 0$ , y se supondra una condición inicial  $y(-1)$ . Se calcula los valores de  $y(n)$  para  $n \geq 0$ , comenzando por  $y(0)$ , haciendo uso de la ecuación (1.111).

$$\begin{aligned} y(0) &= y(-1) + x(0) \\ y(1) &= ay(0) + x(1) = a^2y(-1) + ax(0) + x(1) \\ y(2) &= ay(1) + x(2) = a^3y(-1) + a^2x(0) + ax(1) + x(2) \\ &\vdots \\ y(n) &= ay(n-1) + x(n) \\ &= a^{n+1}y(-1) + a^n x(0) + a^{n-1}x(1) + \dots + ax(n-1) + x(n) \end{aligned}$$

De forma simplificada

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^n a^k x(n-k) \quad n \geq 0 \quad (1.112)$$

Hay dos partes en la ecuación (1.112), la primera es el resultado de la condición inicial  $y(-1)$  del sistema y la segunda parte es la respuesta de la señal de entrada.

Si el sistema inicialmente se encuentra en reposo, entonces su memoria debe ser cero siendo  $y(-1) = 0$ . Es así que un sistema recursivo está en reposo a la inicial en condiciones iniciales nulas. De modo que se puede decir que la salida corresponde a una **respuesta para el estado cero** y se designa por  $y_{EC}(n)$  y se define como

$$y_{EC}(n) = \sum_{k=0}^n a^k x(n-k) \quad n \geq 0 \quad (1.113)$$

La ecuación (1.113) es una operación de convolución que consta de una señal de entrada y la respuesta al impulso

$$h(n) = a^n u(n) \quad (1.114)$$

Por la condición inicial se puede suponer que el sistema es causal. Se ha obtenido el resultado del sistema recursivo en reposo descrito por la ecuación de primer orden (1.111) es un sistema LTI IIR con respuesta al impulso dado en la ecuación (1.114).

Ahora se supone que (1.111) no está en reposo ( $y(-1) \neq 0$ ) y que la entrada es  $x(n) = 0$  para todo  $n$ . De modo que la salida del sistema para una entrada igual a cero es la **respuesta para la entrada nula o respuesta natural** y se designa por  $y_{RN}(n)$  y se define así

$$y_{RN}(n) = a^{n+1}y(-1), \quad n \geq 0 \quad (1.115)$$

Cabe destacar que un sistema recursivo con condición inicial diferente de cero no está en reposo en sentido que pueda generar una salida sin haber sido excitado. La respuesta a la entrada nula se debe a la memoria del sistema.

En general la respuesta del sistema se puede expresar de la forma

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (1.116)$$

Lo que equivale a

$$\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad a_0 \equiv 1 \quad (1.117)$$

El entero  $N$  define el orden de la ecuación en diferencias del sistema. La ecuación (1.116) es la salida del sistema y expresa la suma ponderada de las salidas pasadas  $y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N)$  igualmente como las muestras de las entradas pasadas y presentes. Las condiciones iniciales implican todo lo que se sabe sobre la historia pasada de la respuesta del sistema para obtener la salida actual y futura.

### 1.7.1. Solución de las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes.

Este método se denomina método directo, que básicamente es determinar la salida  $y(n), n \geq 0$  a una entrada específica  $x(n), n \geq 0$ , y con unas ciertas condiciones iniciales. La solución plantea la suma de dos partes

$$y(n) = \underbrace{y_h(n)}_{\text{solución homogénea o complementaria}} + \underbrace{y_p(n)}_{\text{solución particular}}$$

#### 1.7.1.1. Solución homogénea

Se inicia resolviendo la ecuación (1.117), obteniendo la ecuación en diferencias como

$$\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = 0 \quad (1.118)$$

Se inicia suponiendo que la solución tien la forma de una exponencial asi

$$y_h(n) = \lambda^n \quad (1.119)$$

Sustituyendo (1.119) en (1.118) se tiene

$$\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = 0 \quad (1.120)$$

$$\lambda^{n-N}(\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + a_2 \lambda^{N-2} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N) = 0$$

Obteniéndose un polinomio denominado como polinomio característico del sistema. Teniendo  $N$  raíces que se designan asi  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ , siendo estas raíces reales o complejas. En la práctica, los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_N$  son reales generalmente. Las raíces complejas serán pares complejos conjugados, algunas raíces pueden ser iguales, así que se tendrán raíces de orden múltiple. Por ahora no existen raíces de orden múltiple.

La solución homogénea dada por (1.118) es

$$y_h(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_N \lambda_N^n \quad (1.121)$$

Los coeficientes  $C_1, C_2, \dots, C_N$  se encuentran con las condiciones iniciales del sistema.

### 1.7.1.2. Solución particular.

La solución particular debe satisfacer

$$\sum_{k=0}^N a_k y_p(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad a_0 = 1 \quad (1.122)$$

Si la entrada  $x(n), n \geq 0$ , es una constante la solución particular también es una constante, si  $x(n)$  es una exponencial, la solución particular también es una exponencial. si  $x(n)$  es una senoide, la solución particular también es una senoide. Dependiendo del tipo de excitación será la solución particular. La tabla 1 muestra la solución particular para los tipos de excitación.

Tabla 1. Solución particular para varios tipos de señales de entrada.

Señal de entrada $x(n)$	Solución Particular $y_p(n)$
A (constante)	K
$AM^n$	$KM^n$
$An^M$	$K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \dots + K_M$
$A^n n^M$	$A^n (K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \dots + K_M)$
$\begin{cases} A \cos w_0 n \\ A \sen w_0 n \end{cases}$	$K_1 \cos w_0 n + K_2 \sen w_0 n$

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

### 1.7.1.3. Solución completa.

De la solución homogénea y la solución particular se obtiene la solución completa. Luego

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

La solución contiene las constantes  $\{C_i\}$ , estas constantes se obtienen de las condiciones iniciales. Con el ejemplo se ilustra el procedimiento a seguir.

**Ejemplo 1.11:** Encuentre la solución completa  $y(n), n \geq 0$ , para el sistema en ecuaciones en diferencias de segundo orden.

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1) \quad (1.123)$$

Siendo la señal de entrada

$$x(n) = 4^n u(n)$$

Solución: Primero se determina la solución homogénea de la forma

$$y_h(n) = \lambda^n$$

Se reemplaza en (1.123)

$$\begin{aligned} \lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} &= 0 \\ \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Obteniendo las raíces

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 3\lambda - 4 &= 0 \\ (\lambda + 1)(\lambda - 4) &= 0 \\ \lambda_1 = -1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 &= 4 \end{aligned}$$

Siendo la solución homogénea

$$y_h(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$$

$$y_h(n) = C_1(-1)^n + C_2(4)^n \quad (1.124)$$

Para la solución particular, como la señal de entrada es de forma exponencial, está tendrá la misma forma (ver tabla 1) teniendo en cuenta raíces múltiples, de modo que se supone que tendrá la siguiente forma.

$$y_p(n) = Kn(4)^n u(n) \quad (1.125)$$

Sustituyendo en (1.123) se tiene

$$\begin{aligned} Kn(4)^n u(n) - 3K(n-1)(4)^{n-1} u(n-1) - 4K(n-2)(4)^{n-2} u(n-2) \\ = (4)^n u(n) + 2(4)^{n-1} u(n-1) \end{aligned}$$

Se evalúa la ecuación anterior en  $n \geq 2$  para que ningún término del escalon unitario se anule y se toma  $n = 2$  para obtener el valor de  $K = \frac{6}{5}$ , siendo entonces la solución particular

$$y_p(n) = \frac{6}{5}n(4)^n u(n) \quad (1.126)$$

Finalmente, la solución completa es

$$y(n) = C_1(-1)^n + C_2(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n, \quad n \geq 0 \quad (1.127)$$

Para obtener los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se evalúan en las condiciones iniciales  $n = 0$  y  $n = 1$  en la ecuación inicial (1.123) obteniéndose

$$\begin{aligned} y(0) &= 3y(-1) + 4y(-2) + 1 \\ y(1) &= 13y(-1) + 12y(-2) + 9 \end{aligned}$$

Igualmente, se evalúa la solución completa en  $n = 0$  y  $n = 1$  dando

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 \\ y(1) &= -C_1 + 4C_2 + \frac{24}{5} \end{aligned}$$

Para la respuesta en estado cero o respuesta en estado cero se hace  $y(-1) = y(-2) = 0$  de forma que

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ -C_1 + 4C_2 + \frac{24}{5} &= 9 \\ C_1 = -\frac{1}{25} \quad y \quad C_2 &= \frac{26}{25} \end{aligned}$$

Es así que la respuesta completa es

$$y(n) = -\frac{1}{25}(-1)^n + \frac{26}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n, \quad n \geq 0 \quad (1.128)$$

## 2. TRANSFORMADA Z.

### 2.1. La Transformada Z directa.

Es una señal discreta en el tiempo  $x(n)$  que se define como una serie de potencias

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.1)$$

Donde  $z$  es una variable compleja. La relación (2.1) se denomina transformada  $z$  directa, pues toma una señal en el dominio del tiempo  $x(n)$  y la representa en el plano complejo  $X(z)$ .

Para una señal de entrada  $x(n)$  la transformada  $z$  se designa como

$$X(z) \equiv Z\{x(n)\} \quad (2.2)$$

Y la forma de relacionar  $x(n)$  y  $X(z)$  será así

$$x(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X(z) \quad (2.3)$$

Como la transformada  $z$  es una serie infinita de potencias, sólo va a existir para aquellos valores de  $z$  donde la serie converge.

### 2.2. La Región de Convergencia.

(ROC, *region of convergence*): Es el conjunto de valores de  $z$  donde  $X(z)$  tiene un valor finito. Es así, que al hablar de la transformada  $z$  siempre debe indicar su ROC.

Ejemplo 2.1: Encuentre la transformada  $z$  de las señales de duración finita.

- a)  $x_1(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$
- b)  $x_2(n) = \delta(n)$
- c)  $x_3(n) = \delta(n - k), k > 0$
- d)  $x_4(n) = \delta(n + k), k > 0$

Solución

- a)  $X_1(z) = 2z^2 + 2z^1 + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$  ROC: plano  $z$  completo excepto  $z = 0$  y  $z = \infty$
- b)  $X_2(z) = 1$  ( $\delta(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} 1$ ) ROC: plano  $z$  completo
- c)  $X_3(z) = z^{-k}$  ( $\delta(n - k) \stackrel{z}{\leftrightarrow} z^{-k}$ ),  $k > 0$  ROC: plano  $z$  completo excepto  $z = 0$
- d)  $X_4(z) = z^k$  ( $\delta(n + k) \stackrel{z}{\leftrightarrow} z^k$ ),  $k > 0$  ROC: plano  $z$  completo excepto  $z = \infty$

En el ejemplo anterior se nota que la ROC de una señal de duración finita es el plano  $z$  completo, exceptuando los puntos donde  $z$  no esta acotada, como son  $z^k$  ( $k > 0$ )  $z = \infty$  y  $z^{-k}$  ( $k > 0$ )  $z = 0$ .

Matemáticamente la transformada  $z$  es una representación alternativa de una señal, los coeficientes  $z^{-n}$  es el valor de la señal en el instante  $n$ , es decir, el exponente de  $z$  tiene la información temporal necesaria para identificar la señal.

Como  $z$  es una variable compleja se puede expresar de forma polar así:

$$z = r e^{j\theta} \quad (2.4)$$

Donde  $r = |z|$  y  $\theta = \angle z$ , es así que  $X(z)$  se puede expresar

$$X(z)|_{z=r e^{j\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}$$

Como  $|X(z)|$  es finito la secuencia  $x(n)r^{-n}$  es absolutamente sumable.

La ROC de  $X(z)$ ,  $|X(z)| < \infty$

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) r^{-n}| \quad (2.5)$$

La forma de encontrar la ROC de  $X(z)$  es igual a encontrar aquel rango de valores de  $r$  donde la secuencia  $x(n)r^{-n}$  es absolutamente sumable. Luego (2.5) se expresa así

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n) r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x(n)}{r^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x(-n) r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x(n)}{r^n} \right| \quad (2.6)$$

Cuando  $X(z)$  converge ambos lados de la ecuación (2.6) serán finitos en esa región. En el primer termino de la ecuación (2.6) es absolutamente sumable si hay valores de  $r$  pequeños para los que el producto  $x(n)r^{-n} \leq n \leq \infty$  converge, es así que la ROC contiene todos los valores dentro del radio  $r_1$  con  $r_1 < \infty$  (ver figura 28 (a)).

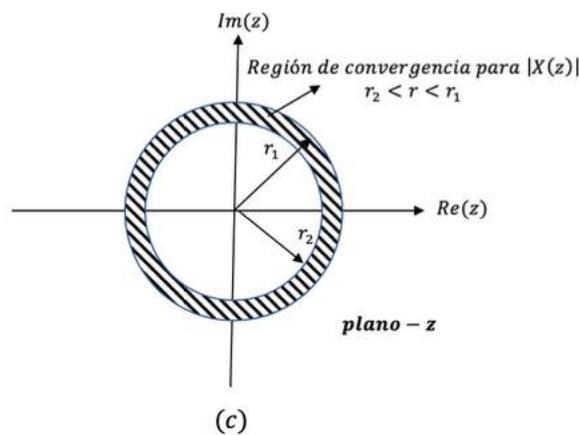
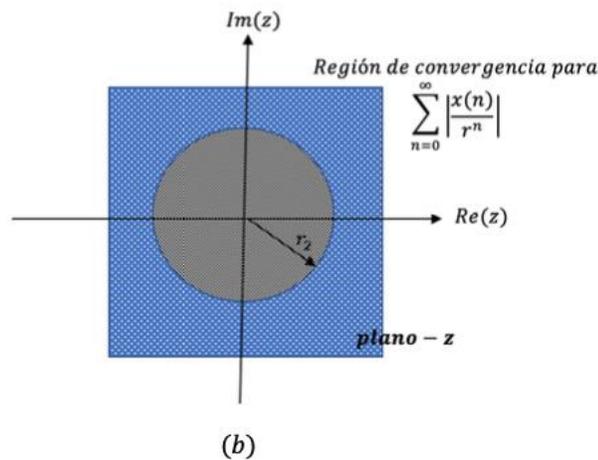
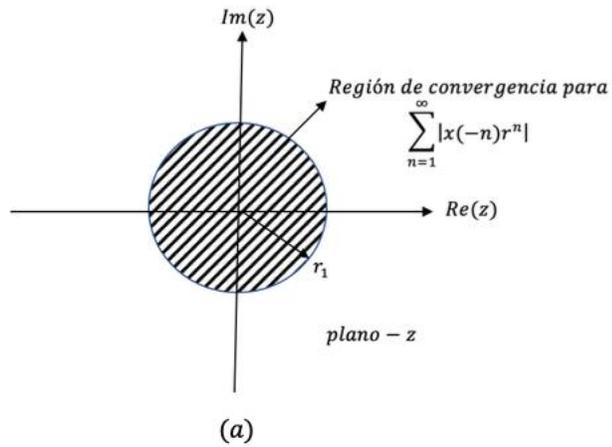


Figura 28: ROC para  $X(z)$  y sus correspondientes componentes causal y no causal.

Fuente: Autor

Por otro lado, al converger el segundo términos de la ecuación (2.6), existen valores para  $r$  grandes para los que la división  $\frac{x(n)}{r^n}$  sea absolutamente sumable, siendo la ROC la región que contiene todos los valores externos de la circunferencia de radio  $r > r_2$  (ver figura 28 (b)).

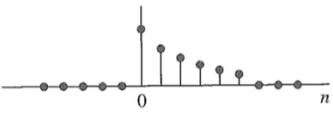
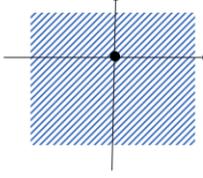
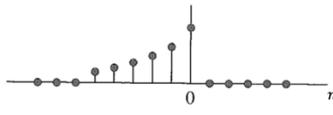
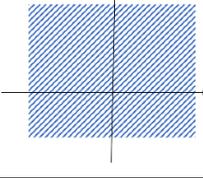
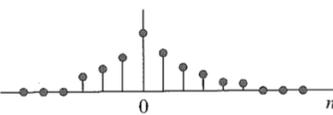
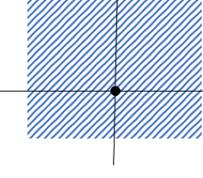
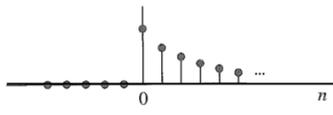
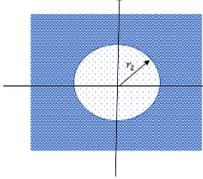
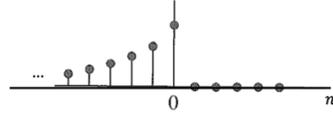
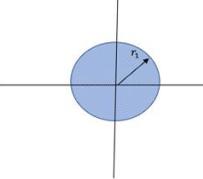
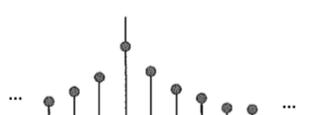
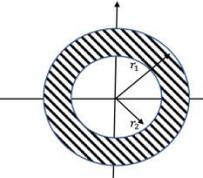
Al ser ambos lados de la sumatoria sumables son finitos y  $X(z)$  converge, de modo que ROC es la región anular en el plano  $z$ ,  $r_2 < r < r_1$ , región comun de las sumatorias y que son finitos. (ver figura 28(c)).

### 2.2.1. Propiedades de la región de convergencia de la transformada Z.

La ROC se una señal depende de su duración tanto finita como infinita, además si es causal, no causal o bilateral como se ve en la tabla 2.

Una señal bilateral es un caso especial pues tiene duración infinita del lado derecho y finita del lado izquierdo, es decir,  $x(n) = 0, n < n_0 < 0$ . Tambien se presenta el caso contrario, duración finita del lado derecho e infinita del lado izquierdo, osea,  $x(n) = 0, n > n_1 > 0$ . Un caso a tener en cuenta también es una señal con duración finita a ambos lados  $x(n) = 0, n < n_0 < 0$  y  $n > n_1 > 0$ . Este tipo de señales se conocen como señales unilaterales por la derecha, unilateral por la izquierda y bilateral de duración finita, respectivamente.

Tabla 2: ROC para diferentes señales según sus características.

Tipo de Señal		ROC	
<b>SEÑALES DE DURACIÓN FINITA</b>			
Causal			Plano $z$ completo excepto $z = 0$
No causal			Plano $z$ completo excepto $z = \infty$
Bilateral			Plano $z$ completo excepto $z = 0$ y $z = \infty$
<b>SEÑALES DE DURACIÓN INFINITA</b>			
Causal			$ z  > r_2$
No causal			$ z  < r_1$
Bilateral			$r_1 <  z  < r_2$

Fuente: Autor.

### 2.3. Transformada $z$ inversa.

Ya que se cuenta con  $X(z)$  y su ROC única se puede definir el operador inverso tomando  $X(z)$  y entragando la señal  $x(n)$ . Este procedimiento se conoce como transformada  $z$  inversa.

Para realizar el procedimiento de transformación inverso se debe utilizar el *teorema de la integral de Cauchy*, ya que es importante dentro de la teoría de la variable compleja.

La definición de la transformada  $z$  fue dada en (2.1) como

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (2.7)$$

Si se multiplica a ambos lados de (2.7) por  $z^{n-1}$  y se integra en un contorno cerrado (ver figura 29) dentro de ROC de  $X(z)$  que contiene el origen, de modo que se tiene

$$\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{n-1-k}dz \quad (2.8)$$

$C$  indica el contorno cerrado dentro de la ROC de  $X(z)$  recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj. Ya que la serie converge en el contorno  $C$ , se puede hacer un intercambio en el orden de las operaciones de integración y sumatoria del lado derecho de la ecuación (2.8) quedando

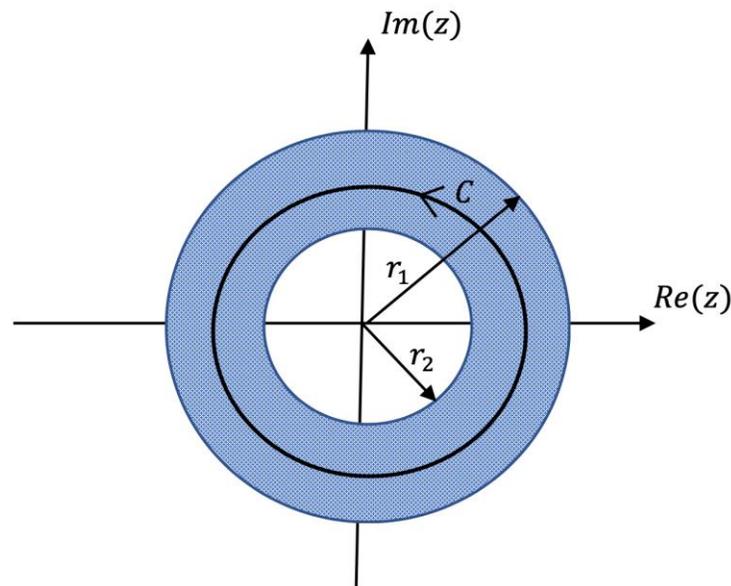


Figura 29: Contorno  $C$  para la integral de la ecuación (2.8).

Fuente: Autor

$$\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{n-1-k} dz \quad (2.9)$$

Ahora se hará uso del teorema de la integral de Cauchy, que establece que

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} dz = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (2.10)$$

$C$  es cualquier contorno que contiene el origen. Al aplicar (2.10) se reduce el lado derecho de (2.9) a  $2\pi j x(n)$ , y es así que la fórmula de inversión es

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) permite determinar la secuencia  $x(n)$  a partir de la transformada  $z$ , no se empleará directamente para evaluar la transformada  $z$  inversa. En las aplicaciones se usará directamente el uso de tablas, en la tabla se encuentran las más comunes.

Tabla 3: Transformada  $z$  de funciones más comunes

Señal $x(n)$	Transformada $z, X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	Plano $z$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  >  a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$-(a^n)u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  <  a $
$-n(a^n)u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z  <  a $
$\cos(w_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos w_0}{1-2z^{-1}\cos w_0+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\text{sen}(w_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\text{sen} w_0}{1-2z^{-1}\cos w_0+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$a^n \cos(w_0 n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos w_0}{1-2az^{-1}\cos w_0+a^2z^{-2}}$	$ z  >  a $
$a^n \text{sen}(w_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1}\text{sen} w_0}{1-2az^{-1}\cos w_0+a^2z^{-2}}$	$ z  >  a $

Fuente: Autor

## 2.4. Propiedades de la Transformada Z.

Una herramienta muy potente en el análisis de las señales y los sistemas discretos en el tiempo es la transformada  $z$  y que ofrece algunas propiedades se se ilustraran a continuación.

### 2.4.1. Linealidad.

Si

$$x_1(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X_1(z)$$

se tiene también

$$x_2(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X_2(z)$$

Es así que

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \quad (2.12)$$

Para cualquier constante  $a_1$  y  $a_2$ .

Se puede generalizar para la cantidad de señales necesarias. Básicamente dice que la transformada  $z$  de una combinación de señales es igual a la combinación lineal de sus transformadas, es decir, que una señal se puede expresar en una suma elemental donde sus transformadas  $z$  son conocidas.

### 2.4.2. Desplazamiento temporal.

Si

$$x_1(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X_1(z)$$

Es así que

$$x(n - k) \stackrel{z}{\leftrightarrow} z^{-k}X(z) \quad (2.13)$$

La ROC de  $z^{-k}X(z)$  es igual a  $X(z)$  excepto para  $z = 0$  si  $k > 0$  y  $z = \infty$  si  $k < 0$ .

### 2.4.3. Cambio de escala en el dominio $z$ .

Si

$$x(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X(z), \quad ROC: r_1 < |z| < r_2$$

Es así que

$$a^n x(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X(a^{-1}z), \quad ROC: |a| r_1 < |z| < |a| r_2 \quad (2.14)$$

La constante  $a$  puede ser real o compleja

Demostración: Se toma la definición de la ecuación (2.1)

$$Z\{a^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

Ya que la ROC de  $X(z)$  es  $r_1 < |z| < r_2$ , la ROC de  $X(a^{-1}z)$  sería

$$r_1 < |a^{-1}z| < r_2$$

O también

$$|a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

Para una mejor comprensión se expresa  $a$  y  $z$  de forma polar así  $a = r_0 e^{jw_0}$  y  $z = r e^{jw}$  y se toma la variable compleja  $w = a^{-1}z$ . De modo que  $Z\{x(n)\} = X(z)$  y  $Z\{a^n x(n)\} = X(w)$  verificandose que

$$w = a^{-1}z = \left(\frac{1}{r_0}r\right) e^{j(w-w_0)}$$

Al realizar el cambio de variable se observa que la región  $r_0 > 1$  se estrecha y  $r_0 < 1$  se expande en el plano  $z$  combinandose con la rotación del plano  $z$  si  $w_0 \neq 2k\pi$  (ver figura 30). Es así que hay un cambio en la ROC de la transformada donde  $|a| < 1$ . Cuando  $|a| = 1$ , osea  $a = e^{jw_0}$  corresponde con la rotación del plano  $z$ .

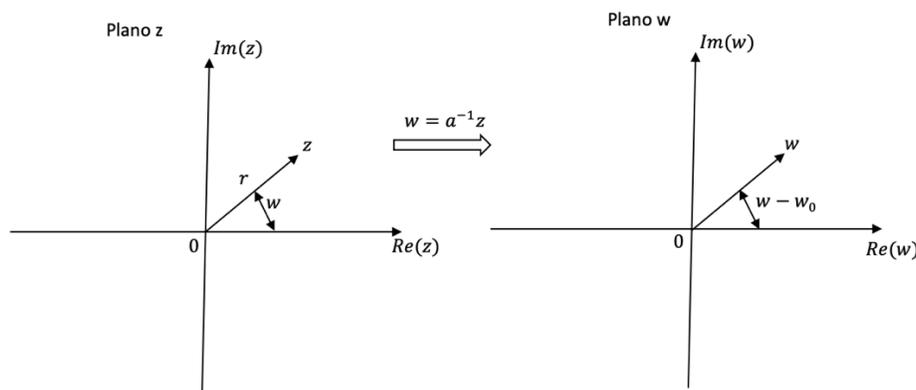


Figura 30: Relación del plano  $z$  con el plano  $w$  por la transformación  $w = a^{-1}z$ ,  $a = r_0 e^{jw_0}$ .

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

#### 2.4.4. Inversión temporal.

Si

$$x(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X(z), \quad \text{ROC: } r_1 < |z| < r_2$$

Es así que

$$x(-n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X(z^{-1}), \quad \text{ROC: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1} \quad (2.15)$$

Demostración:

Se parte de la ecuación (2.1) teniendo

$$Z\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)(z^{-1})^l = X(z^{-1})$$

Haciendo el cambio de variable  $l = -n$ . Quedando la ROC de  $X(z^{-1})$  como

$$r_1 < |z^{-1}| < r_2$$

O también

$$\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

La ROC de  $x(n)$  es la inversa de  $x(-n)$ , significa que si  $z_0$  pertenece a ROC de  $x(n)$ , entonces  $\frac{1}{z_0}$  pertenece a ROC de  $x(-n)$ .

Intuitivamente (2.15) se demuestra, si se refleja la señal, siendo el coeficiente de  $z^{-n}$  se convierte en el coeficiente de  $z^n$ . De modo que al reflejar la señal es igual que remplazar  $z$  por  $z^{-1}$  en la transformada  $z$ .

#### 2.4.5. Diferenciación en el dominio z.

Si

$$x(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X(z)$$

Es así que

$$nx(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad (2.16)$$

Demostración:

Al diferenciar en ambos lados de la ecuación (2.1), se tiene

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nx(n)]z^{-n} = -z^{-1}Z\{nx(n)\}$$

La ROC para ambas transformadas es la misma.

#### 2.4.6. Convolución de dos secuencias.

Si

$$\begin{aligned} x_1(n) &\stackrel{z}{\leftrightarrow} X_1(z) \\ x_2(n) &\stackrel{z}{\leftrightarrow} X_2(z) \end{aligned}$$

Es así que

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X(z) = X_1(z)X_2(z) \quad (2.17)$$

La ROC es la intersección de las regiones de convergencia de  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ .

Demostración: La convolución entre  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  esta definida por

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

La transformada es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right] z^{-n}$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento temporal e intercambiando el orden de las sumatorias en (2.13) se tiene

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k) z^{-n} \right] = X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) z^{-k} = X_2(z) X_1(z)$$

Esta es una de las propiedades más importantes de la transformada  $z$ , ya que la convolución de dos señales es la multiplicación de sus transformadas. Para el cálculo hay que realizar los siguientes pasos:

1. Encontrar la transformada  $z$  de las señales que se vana convolucionar

$$X_1(z) = Z\{x_1(n)\}$$

(dominio del tiempo  $\rightarrow$  dominio  $z$ )

$$X_2(z) = Z\{x_2(n)\}$$

2. Realizar la multiplicación de las transformadas

$$X(z) = X_1(z) X_2(z) \quad (\text{dominio } z)$$

3. Encontrar la transformada inversa de  $X(z)$

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} \quad (\text{dominio } z \rightarrow \text{dominio tiempo})$$

#### 2.4.7. Correlación de dos secuencias

Si

$$x_1(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X_1(z)$$

$$x_2(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X_2(z)$$

Es así que

$$r_{x_1 x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2(n-l) \stackrel{z}{\leftrightarrow} R_{x_1 x_2}(z) = X_1(z) X_2(z^{-1}) \quad (2.18)$$

Demostración: Hay que recordar que

$$r_{x_1 x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$$

Al aplicar la propiedad de inversión temporal y convolución se obtiene

$$R_{x_1 x_2}(z) = Z\{x_1(l)\} Z\{x_2(-l)\} = X_1(z) X_2(z^{-1})$$

La ROC es la intersección de las regiones de convergencia.

### 2.4.8. Multiplicación de dos secuencias.

Si

$$\begin{aligned}x_1(n) &\stackrel{z}{\leftrightarrow} X_1(z) \\x_2(n) &\stackrel{z}{\leftrightarrow} X_2(z)\end{aligned}$$

Entonces

$$x(n) = x_1(n)x_2(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} X(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv \quad (2.19)$$

El contorno cerrado (C) contiene el origen y está en la ROC común a  $X_1(v)$  y  $x_2(1/v)$

Demostración: La transformada de  $x(n)$  es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n)z^{-n}$$

Aplicamos la transformada inversa

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)v^{n-1}dv$$

Se realiza un intercambio de posición de las operaciones de multiplicación e integración, obteniéndose

$$X(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} \right] v^{-1}dv$$

La operación entre corchetes es la transformada de  $X_2(z)$  evaluada en  $z/v$ . Por tanto

$$X(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

Obteniéndose lo que se esperaba.

Para la ROC hay que tener en cuenta que si  $X_1(v)$  converge en  $r_{1l} < |v| < r_{1u}$  y  $X_2(z)$  converge en  $r_{2l} < |z| < r_{2u}$ , la ROC de  $X_2(z/v)$  es

$$r_{2l} < \left| \frac{z}{v} \right| < r_{2u}$$

Entonces la ROC para  $X(z)$  sería

$$r_{1l}r_{2l} < |z| < r_{1u}r_{2u} \quad (2.20)$$

La aplicación de esta propiedad se hará cuando se hable de diseño de filtros basados en técnicas de ventana, donde se multiplica la respuesta al impulso de un sistema IIR por una “ventana” de duración finita, que sirve para seccionar la respuesta al impulso del sistema IIR.

#### 2.4.9. Teorema del valor inicial.

Si la señal  $x(n)$  es causal, es decir,  $x(n) = 0$  para  $n < 0$ , es así que

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (2.21)$$

Demostración: Ya que  $x(n)$  es causal, la ecuación (2.1) proporciona

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

Como  $z \rightarrow \infty$ ,  $z^{-n} \rightarrow 0$  y  $n > 0$  se obtiene (2.21)

A continuación, se mostrará un resumen de las propiedades mencionadas las que se presentan en la tabla 4.

Tabla 4: Propiedades de la transformada z.

Propiedad	Dominio tiempo	Dominio z	ROC
Notación	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	$ROC: r_2 <  z  < r_1$ $ROC_1$ $ROC_2$
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	Intersección de $ROC_1$ y $ROC_2$
Desplazamiento temporal	$x(n - k)$	$z^{-k}X(z)$	La de $X(z)$ , excepto $z = 0$ si $k > 0$ y $z = \infty$ si $k < 0$
Cambio de escala en dominio z	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$ a r_2 <  z  <  a r_1$
Inversión temporal	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} <  z  < \frac{1}{r_2}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	ROC
Parte real	$Re\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	ROC
Parte imaginaria	$Im\{x(n)\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	ROC
Diferenciación en el dominio z	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 <  z  < r_1$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Intersección $ROC_1$ y $ROC_2$
Correlación	$r_{x_1x_2}(l)$ $= x_1(l) * x_2(-l)$	$R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})$	Intersección de la ROC de $X_1(z)$ y $X_2(z^{-1})$
Teorema del valor inicial	Si $x(n)$ es causal	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	
Multiplicación	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2^*(1/v^*)v^{-1}dv$	

Fuente: Autor.

## 2.5. Transformada z inversa mediante fracciones parciales.

La transformada se puede expresar de forma racional así

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} \quad (2.22)$$

Una función racional es propia si  $a_N \neq 0$  y  $M < N$ . Siendo del número de ceros finitos (coeficientes del numerador) es menor al número de polos (coeficientes de denominador) finitos.

Una función racional impropia ( $M \geq N$ ) se puede escribir como la suma de polinomios al igual que la función racional propia.

De forma general la función racional impropia se muestra así

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = c_0 + c_1z^{-1} + \dots + c_{M-N}z^{-(M-N)} + \frac{B_1(z)}{A(z)} \quad (2.23)$$

Cualquier función racional impropia se puede transformar en una función propia usando (2.23). Se seguirán los siguientes pasos

Sea  $X(z)$  una función racional propia como se expresa en (2.22) donde  $a_N \neq 0$  y  $M < N$ , se multiplica por  $z^N$  al denominador como al numerador para eliminar las potencias negativas obteniéndose

$$X(z) = \frac{b_0z^N + b_1z^{N-1} + \dots + b_Mz^{N-M}}{z^N + a_1z^{N-1} + \dots + a_Nz^{N-N}} \quad (2.24)$$

Ya que las potencias son positivas y  $N > M$ , la función queda

$$X(z) = \frac{b_0z^{N-1} + b_1z^{N-2} + \dots + b_Mz^{N-M-1}}{z^N + a_1z^{N-1} + \dots + a_N} \quad (2.25)$$

Manteniéndose la función propia.

Hay que expresar (2.25) en una expansión en fracciones parciales o (2.24) en una suma de fracciones simples. Primero se descompone el denominador de (2.25) en factores que tengan los polos  $p_1, p_2, \dots, p_N$  de  $X(z)$ . Aquí hay dos casos a destacar

### 2.5.1. Polos diferentes.

Como los polos se suponen todos diferentes, se busca una expresión de la forma

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{A_N}{z - p_N} \quad (2.26)$$

De modo que hay que encontrar los coeficientes  $A_1, A_2, \dots, A_N$ , para ello se multiplica ambos lados de la ecuación (2.26) por  $(z - p_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  a cada termino, es así que se tiene

$$\frac{(z - p_k) X(z)}{z} = \frac{(z - p_k) A_1}{z - p_1} + \dots + A_k + \dots + \frac{(z - p_k) A_N}{z - p_N} \quad (2.27)$$

Si se hace  $z = p_k$ , la ecuación (2.27) permitirá encontrar los coeficientes así

$$A_k = \left. \frac{(z - p_k) X(z)}{z} \right|_{z=p_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) y la expansión (2.26) funciona igual mente para polos complejas así como para los polos reales.

Los polos complejos conjugados producen coeficientes complejos conjugados en la expansión en fracciones parciales.

### 2.5.2. Polos de orden múltiple

Cuando  $X(z)$  contiene un polo múltiple de orden  $m$ , es decir, que el factor del denominador es  $(z - p_k)^m$  y (2.26) no se cumple. La expansión debe contener los terminos

$$\frac{A_{1k}}{z - p_k} + \frac{A_{2k}}{(z - p_k)^2} + \dots + \frac{A_{mk}}{(z - p_k)^m}$$

Los coeficientes  $\{A_{ik}\}$  se evalúan diferenciando respecto a  $z$ .

Una vez obtenida la expansión en fracciones parciales, se puede pasar a la inversión de  $X(z)$ . Primero se consideran los polos diferentes, la expresión en (2.26) quedaria

$$X(z) = A_1 \frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + A_N \frac{1}{1 - p_N z^{-1}} \quad (2.29)$$

La transformada  $z$  inversa,  $x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$ , se encuentra invirtiendo cada termino de (2.29) y realizando la combinación lineal correspondiente. Con la tabla 3 se obtienen los términos usando la formula

$$Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - p_k z^{-1}} \right\} = \begin{cases} (p_k)^n u(n), & \text{si ROC: } |z| > |p_k| \quad (\text{señales causales}) \\ -(p_k)^n u(-n - 1), & \text{si ROC: } |z| < |p_k| \quad (\text{señales no causales}) \end{cases} \quad (2.30)$$

Si la señal es causal, ROC es  $|z| > p_{max}$  y  $p_{max} = \max\{|p_1|, |p_2|, \dots, |p_N|\}$ , todos los terminos de (2.29) se expresa asi

$$x(n) = (A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \dots + A_N p_N^n) u(n) \quad (2.31)$$

Si los polos son reales (2.31) es la expresión para  $x(n)$ . Es asi que la señal causal, tiene transformada  $z$  conteniendo polos diferentes y reales y es una combinación lineal de señales exponenciales reales.

Si los polos son diferentes y complejos. Los términos de (2.29) darán componentes exponenciales complejos. Pero si la señal  $x(n)$  es real, los terminos serán reales y los polinomios de  $X(z)$  tendran coeficientes reales.

Si el polo es complejo  $p_j$ , su complejo conjugado  $p_j^*$  tambien será un polo. La contribución de polos complejos conjugados es

$$x_k(n) = [A_k (p_k)^n + A_N^* (p_N^*)^n] u(n) \quad (2.32)$$

Estos términos al combinarlos pueden formar los componentes de una señal real. Primero hay que expresarlos en forma polar  $A_j$  y  $p_j$  (amplitud y fase) asi

$$A_k = |A_k| e^{j\alpha_k} \quad (2.33)$$

$$p_k = r_k e^{j\beta_k} \quad (2.34)$$

Donde  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  son componentes de fase de  $A_k$  y  $p_k$ , sustituyendo en (2.32) se obtiene

$$x_k(n) = |A_k| r_k^n [e^{j(\beta_k n + \alpha_k)} + e^{j(\beta_k n + \alpha_k)}] u(n) \quad (2.35)$$

Lo que es igual a

$$x_k(n) = 2|A_k| r_k^n \cos(\beta_k n + \alpha_k) u(n) \quad (2.36)$$

Es así que se puede concluir

$$z^{-1} \left( \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{A_k^*}{1 - p_k^* z^{-1}} \right) = 2|A_k| r_k^n \cos(\beta_k n + \alpha_k) u(n) \quad (2.37)$$

La ROC es  $|z| > |p_k| = r_k$ .

De la ecuación (2.37) se deduce que cada pareja de polos complejos conjugados en el dominio de  $z$  da como resultado una componente sinusoidal de la señal causal con una envolvente exponencial. La distancia del polo respecto al origen la da  $r_k$  al igual que la variación de la exponencial (si  $r_k > 1$  crece, si  $r_k < 1$  decrece y es constante si  $r_k = 1$ ). El ángulo de los polos respecto al eje real proporciona la frecuencia de la señal sinusoidal. Los ceros solo afectan de forma indirecta a la amplitud y la fase de  $x_k(n)$  a través de  $A_k$ .

### 3. MUESTREO DE SEÑALES.

#### 3.1. Muestreo y reconstrucción de señales continuas en el tiempo.

Las señales de voz, biológicas, sísmicas, de radar, de sonar y diferentes señales de comunicación como audio y vídeo, son analógicas. Para procesar este tipo de señales. Es necesario convertirlas a formato digital, es decir, convertirlas en una secuencia de números con precisión finita. Este procedimiento se llama conversión analógica-digital (A/D) y los dispositivos se denominan convertidores A/D (ADC). La figura 31 ilustra los tres pasos que requiere el proceso de conversión.

- D. **Muestreo:** Es la conversión de una señal continua en el tiempo en una señal discreta en el tiempo que se obtiene mediante la toma de “muestras” de la señal continua en instantes discretos. Por tanto, si  $x_a(t)$  es la entrada del muestreador, la salida será  $x_a(nt) \equiv x(n)$ , donde  $T$  es el intervalo de muestreo.
- E. **Cuantificación:** Aquí se realiza la conversión de una señal de valores continuos tomados en instantes discretos de tiempo en una señal de valores discretos en instantes de tiempo discretos (señal digital). Cada muestra representa el valor seleccionado dentro de un conjunto finito de posibles valores. La diferencia entre la muestra no cuantificada  $x(n)$  y la salida cuantificada  $x_q(n)$  es el error de cuantificación.
- F. **Codificación:** En este proceso, cada valor discreto  $x_q(n)$  se representa por una secuencia binaria de  $b - bits$ .

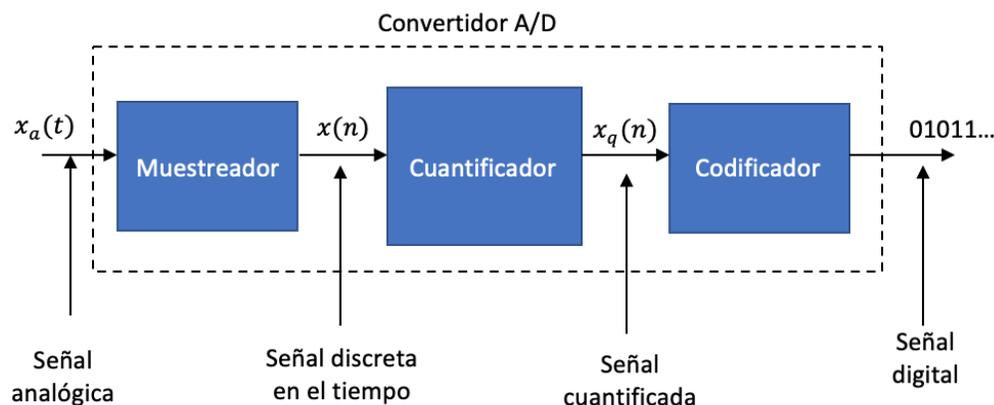


Figura 31: Partes básicas de un convertidor analógico-digital (A/D).

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

Se ha modelado el convertidor A/D como un muestreador, un cuantificador y un codificador, en la práctica, el proceso lo realiza un único dispositivo. Las operaciones de muestreo y cuantificación se pueden realizar en cualquier orden, pero en la práctica, el muestreo se hace siempre antes que la cuantificación.

En el procesamiento de voz, que es uno de los muchos casos prácticos, es deseable convertir las señales digitales a formato analógico. Ya que no es posible escuchar la secuencia de muestras de una señal de voz o ver los dígitos que corresponden a una señal de TV. El proceso de conversión de una señal digital a una analógica se denomina conversión digital-analógica (D/A). Los convertidores D/A realizan interpolación, es decir, “conectan los puntos” de una señal digital, la precisión depende de la calidad del proceso de conversión. La figura 32 muestra un método simple de conversión D/A, llamado aproximación por escalones o mediante retención de orden cero. Hay otro tipo de aproximaciones como la conexión lineal de una pareja de muestras sucesivas (interpolación lineal), ajuste de una función cuadrática a través de tres muestras sucesivas (interpolación cuadrática), etc. Para aquellas señales con un contenido limitado en frecuencia (ancho de banda finito), el teorema de muestreo especifica el método óptimo de interpolación.

El muestreo no da lugar a pérdida de información, es decir, no introduce distorsión en la señal. En principio, la señal analógica se puede reconstruir a partir de las muestras, siempre y cuando la tasa de muestreo se lo suficiente alta para evitar el problema conocido como aliasing. La cuantificación es un proceso no reversible que distorsiona la señal, la cantidad de distorsión depende de la precisión, es decir, el número de bits del proceso de conversión A/D. Lo que afecta la elección de la precisión del convertidor A/D son el coste y la frecuencia de muestreo, cuando el coste aumenta es que ha aumentado la precisión y/o la frecuencia de muestreo.

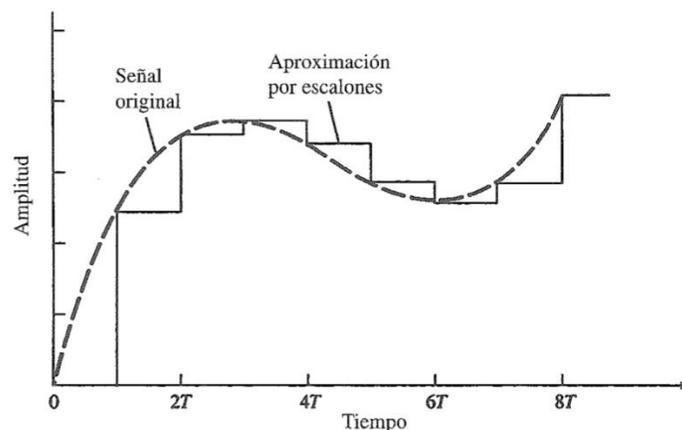


Figura:

Figura 32: Conversión digital-analógica (D/A) mediante escalones.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

Las señales reales son de naturaleza analógica. La obtención de información principal requiere un proceso a través de sistemas adecuados de tiempo continuo. El diseño de estos sistemas puede ser complejo y además costoso.

En los últimos años se ha avanzado en la microelectrónica en dispositivos con características como: procesadores más rápidos y poderosos, más pequeños y de bajo costo. Estos procesadores son fáciles de implementar, por medio de algoritmos, sistemas de tiempo discreto que permiten procesar y obtener información a partir de las señales. El vínculo entre el mundo analógico y el mundo digital donde el procesamiento es simple y barato es lo que se denomina muestreo o sampling, es decir, obtener una representación de una señal de tiempo continuo, lo más parecida posible, mediante una señal de tiempo discreto.

Se tomará lo que denomina muestreo periódico o uniforme es tomar una señal y generar una secuencia de tiempo discreto de la forma

$$x(n) = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty \quad (3.1)$$

Donde  $x_a(t)$  es la señal analógica y  $T$  el periodo de muestreo.

La frecuencia de muestreo  $F_s = 1/T$  debe ser grande para que no cuse perdidas de información espectral (*aliasing*). Se estudiará el proceso de muestreo calculando la relación entre los espectros de las señales  $x_a(t)$  y  $x(n)$ .

Si la señal  $x_a(t)$  no es periódica, pero tiene energía finita, el espectro queda de la siguiente forma por la transformada de Fourier

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad (3.2)$$

Y la señal  $x_a(t)$  se recupera a partir de su espectro por la transformada inversa de Fourier así

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF \quad (3.3)$$

El espectro de una señal discreta en el tiempo, obtenida muestreando  $x_a(t)$  está dada por la transformada de Fourier así

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} \quad (3.4)$$

O también

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi fn} \quad (3.5)$$

Al aplicar la transformada inversa de Fourier se recupera la secuencia  $x(n)$  así

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn} dw \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.2. Introducción al Muestreo Periódico

Para encontrar la relación entre el espectro de la señal discreta y el espectro de la señal analógica, hay que fijarse en que el muestreo periódico impone una relación entre las variables independientes  $t$  y  $n$  en las señales  $x_a(n)$  y  $x(n)$ , es decir,

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \quad (3.7)$$

Esta relación en el tiempo implica una relación entre las variables de frecuencia  $F$  y  $f$  en  $X_a(F)$  y  $X(f)$  respectivamente. Así que al sustituir (3.7) en (3.3) se tiene

$$x(n) \equiv x_a(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_s} dF \quad (3.8)$$

Y al comparar (3.6) con (3.8) se llega a la conclusión

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi fn} df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_s} dF \quad (3.9)$$

Es así que el muestreo periódico relaciona las variables de frecuencia  $F$  y  $f$  de las señales analógicas y discretas en el tiempo, lo que indica que

$$f = \frac{F}{F_s} \quad (3.10)$$

Al realizar un cambio de variable de (3.10) en (3.9) se obtiene como resultado

$$\frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X(F)e^{j2\pi nF/F_s} dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi nF/F_s} dF \quad (3.11)$$

El rango de la integral del lado derecho de (3.11) se puede dividir en un número infinito de intervalos de anchura  $F_s$  es así que la integral de rango infinito (lado izquierdo) se expresa como una suma de integrales, quedando

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF \quad (3.12)$$

$X_a(F)$  en el intervalo de frecuencias de  $(k - 1/2)F_s$  a  $(k + 1/2)F_s$  es igual a  $X_a(F - kF_s)$  en el intervalo  $-F_s/2$  a  $F_s/2$  es así que se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F) e^{j2\pi nF/F_s} dF &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F - kF_s) e^{j2\pi nF/F_s} dF \\ &= \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \right] e^{j2\pi nF/F_s} dF \end{aligned} \quad (3.13)$$

Se ha usado la periodicidad de la exponencial compleja

$$e^{j2\pi n(F+kF_s)/F_s} = e^{j2\pi nF/F_s}$$

Al comparar (3.13), (3.12) y (3.11) se llega a concluir que

$$X(F) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \quad (3.14)$$

Lo que es igual a

$$X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[(f - k)F_s] \quad (3.15)$$

La ecuación (3.15) es la relación que se buscaba entre el espectro  $X(F)$  o  $X(f)$  de la señal discreta y el espectro  $X_a(F)$  de la señal analógica. El lado derecho de las ecuaciones (3.14 o 3.15) son una repetición periódica del espectro escalado  $F_s X_a(F)$  con periodo  $F_s$ .

Si se supone que el espectro de una señal analógica de banda limitada (ver figura 33 (a)). El espectro se hace cero cuando  $|F| \geq B$ . Si la frecuencia de muestreo  $F_s$  se toma mayor a  $2B$ , el espectro  $X(F_s)$  como el que se aprecia en la figura 33 (b), es así que la frecuencia de muestreo será  $F_s \geq 2B$ , donde  $2B$  es la frecuencia de Nyquist, quedando

$$X(F) = F_s X_a(F), \quad |F| \leq F_s/2 \quad (3.16)$$

En este caso no se presenta aliasing, así que el espectro de la señal discreta es idéntico al espectro de la señal analógica en un rango de frecuencia fundamental  $|F| \leq F_s/2$  o  $|f| \leq 1/2$ .

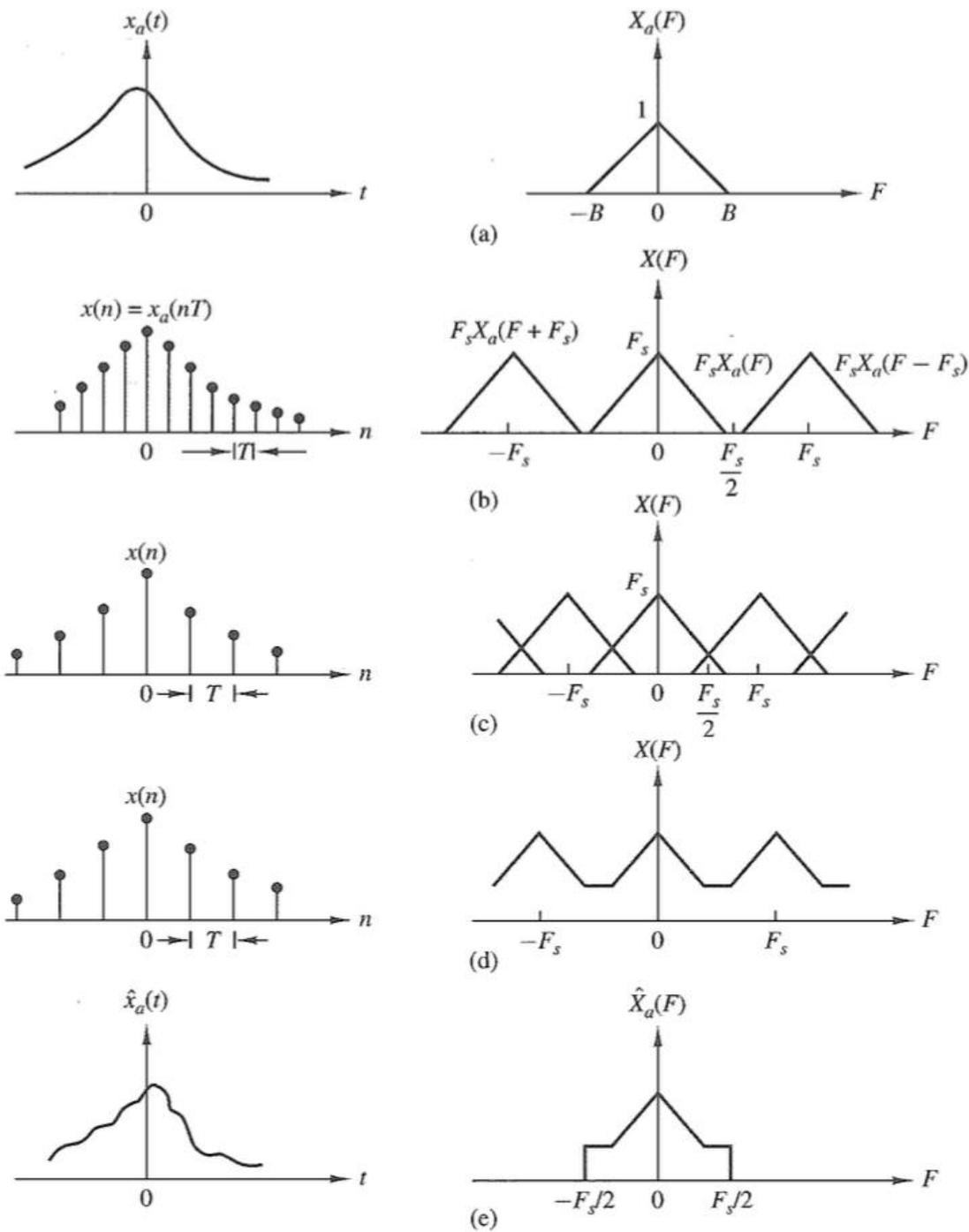


Figura 33: Muestreo señal análoga de banda limitada y aliasing.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

Si la frecuencia de muestreo se selecciona de modo que  $F_s < 2B$ , la continuidad periodica de  $X_a(F)$  resulta en un solapamiento espectral, como se muestra en la figura 33 (c) y (d). Y el espectro de la señal discreta  $X(F)$  contendrá frecuencias suavizadas del espectro de la señal analógica produciendose aliasing e impidiendo recuperar la señal original  $x_a(t)$  a partir de las muestras.

La figura 33 (b) muestra una señal sin aliasing, de modo que se puede reconstruir la señal original  $x(n)$  a partir de las muestras, así

$$X_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} X(F), & |F| \leq F_s/2 \\ 0, & |F| > F_s/2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Y teniendo en cuenta la transformada de Fourier dada por (3.5)

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi Fn/F_s} \quad (3.18)$$

La transformada inversa es

$$x_a(t) = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F)e^{j2\pi Ft} dF \quad (3.19)$$

Cuando  $F_s \geq 2B$  y se aplica (3.17) a (3.19) se tiene

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi kn/F_s} \right] e^{j2\pi Ft} dF \\ &= \frac{1}{F_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-F_s/2}^{F_s/2} e^{j2\pi F(t-n/F_s)} dF \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\text{sen}(\pi/T)(t-nT)}{(\pi/T)(t-nT)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Donde  $x(n) = x_a(nT)$  y  $T = \frac{1}{F_s}$  que es el intervalo de muestreo. Está es la formula para la reconstrucción expuesta por el teorema de muestreo.

La ecuación (3.20) usa la función

$$g(t) = \frac{\text{sen}(\pi/T)(t)}{(\pi/T)(t)} \quad (3.21)$$

Desplazada un valor  $nT$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , y multiplicada por las muestras de la señal  $x_a(nT)$ .

La fórmula (3.20) con la que se reconstruye la señal analógica a partir de sus muestras se conoce como **fórmula de interpolación ideal**, y es la base del teorema de muestreo el cual se describe a continuación.

### 3.3. Teorema de muestreo.

*Una señal continua de banda limitada con frecuencia alta (ancho de banda) de  $B$  hercios sólo se puede recuperar siempre que la tasa de muestreo sea  $F_s \geq 2B$  muestras por segundo.*

Por lo enunciado anteriormente y la ecuación (3.20) la recuperación de la señal  $x_a(t)$  a partir de  $x(n)$  necesita un número infinito de muestras. Pero en la práctica requiere un número finito de muestras de la señal y se trabaja con señales de duración finita, es así que se trabaja con una serie de muestras finitas.

Al presentarse aliasing por una tasa de muestreo muy lenta, se produce un reflejo de los múltiplos de la variable de frecuencia  $F$  para la señal analógica. La figura 34(a) muestra el espectro de una señal analógica. Por la ecuación (3.14), el muestreo producido con frecuencia  $F_s$  produce repeticiones periódicas de  $X_a(F)$  de periodo  $F_s$ . Al ser  $F_s$  menor a  $2B$ , las replicas desplazadas se solapanán como se ve en la figura 34(b), en un rango de frecuencia fundamental  $-F_s/2 \leq F \leq F_s/2$ . La figura 34(c) es el espectro en un rango  $|f| \leq \frac{1}{2}$  de la suma de todas las partes desplazadas de la frecuencia fundamental.

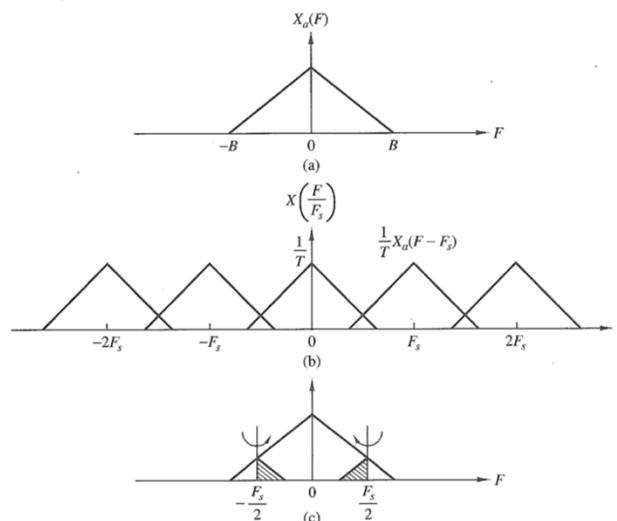


Figura 34: Aliasing alrededor de la frecuencia de solapamiento.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

Es claro que el muestreo periódico fuerza el reflejo del eje de frecuencias de una señal analógica en múltiplos impares de  $F_s/2$ , dando como resultado  $F = fF_s$  entre las frecuencias de la señal continua y discreta en el tiempo. Por el solapamiento la relación  $F = fF_s$  no es completamente lineal, la linealidad se da por tramos como se ve en la figura 35.

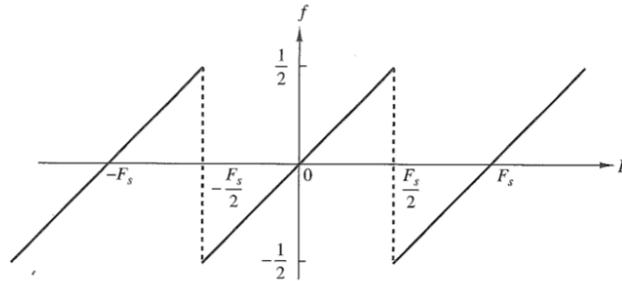


Figura 35: Relación entre la frecuencia  $F$  y  $f$  .

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

Si la banda de la señal analógica es limitada  $B \leq F_s/2$ , la relación entre  $F$  y  $f$  será lineal y punto a punto, lo que quiere decir que no existe aliasing. En la práctica se realiza un prefiltrado con un filtro de antialiasing antes del muestreo, es así que se asegura que las componentes de la señal,  $F \geq B$  se atenúen para que si se presenta aliasing la distorsión sea despreciable en la señal deseada. La figura 36 muestra las relaciones entre las funciones en el dominio del tiempo y frecuencia de  $x_a(t)$ ,  $x(n)$ ,  $X_a(F)$  y  $X(f)$ .

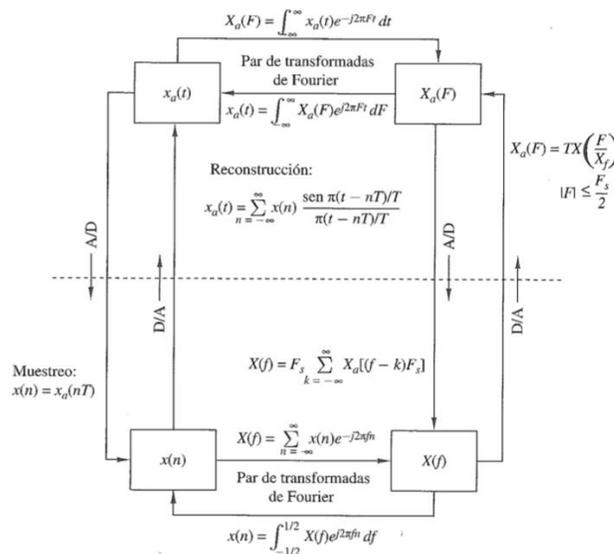


Figura 36: Relaciones en el dominio del tiempo y frecuencia para señales muestreadas.

Fuente: (Proakis & Manolakis, 2007)

## 4. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (TDF)

La transformada discreta de Fourier es un método que se usa para definir una señal muestreada frente a las frecuencias espectrales que componen la señal. Realiza el estudio de funciones periódicas en parámetros cerrados, dando como resultado una señal discreta. La cual se definirá a continuación

La transformada discreta de Fourier es una señal  $x(n)$  definida en el rango  $0 \leq n \leq N - 1$  se define de la siguiente forma

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (4.1)$$

Donde  $w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  y los valores espectrales  $X(k)$  se evalúan en  $0 \leq k \leq N - 1$ . Al término  $w_N$  se le denomina frecuentemente “twiddle factor” el cual es un conjunto de valores complejos.

### 4.1. Interpretación de la TDF.

Se encuentran dos puntos de vista los cuales permiten interpretar los resultados obtenidos de una secuencia  $x_s[n]$  a través de la transformada discreta de Fourier.

1. Los coeficientes espectrales: Una vez conocidos de la serie de Fourier. Se observa en la señal periódica discreta, con muestreos coincidentes con la secuencia  $x_s[n]$ .
2. El espectro de una señal periódica discreta, con muestreos correspondientes a la secuencia  $x_s[n]$ .

La transformada discreta es una aproximación al espectro de la señal analógica original. Su fase depende de los instantes de muestreo, mientras que su magnitud depende del intervalo de muestreo.

### 4.2. Propiedades.

La TDF tiene diversas propiedades, la mayoría son versiones de tiempo discreto de las propiedades de la transformada en tiempo continuo (CTF) las que se describirán en la siguiente tabla 5.

Tabla 5: Propiedades TDF

Propiedad	Par de transformadas/Propiedad
Linealidad	$ax[n] + bv[n] \leftrightarrow aX(\Omega) + bV(\Omega)$
Desplazamiento en el tiempo por la derecha o por la izquierda	$x[n - q] \leftrightarrow X(\Omega)e^{-jq\Omega}$ , $q$ cualquier entero
Inversión en el tiempo	$x[-n] \leftrightarrow X(-\Omega) = \overline{X(\Omega)}$
Multiplicación por $n$	$nx[n] \leftrightarrow j \frac{d}{d\Omega} X(\Omega)$
Multiplicación por una exponencial compleja	$x[n]e^{jn\Omega_0} \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$ , $\Omega_0$ real
Multiplicación por $\sin \Omega_0 n$	$x[n] \sin \Omega_0 n \leftrightarrow \frac{j}{2} [X(\Omega + \Omega_0) - X(\Omega - \Omega_0)]$
Multiplicación por $\cos \Omega_0 n$	$x[n] \cos \Omega_0 n \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\Omega + \Omega_0) + X(\Omega - \Omega_0)]$
Convolución en el dominio de tiempo	$x[n] * v[n] \leftrightarrow X(\Omega)V(\Omega)$
Sumatoria	$\sum_{i=0}^n x[i] \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi X(2\pi n) \delta(\Omega - 2\pi n)$
Multiplicación en el dominio de tiempo	$x[n]v[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega - \lambda)V(\lambda) d\lambda$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]v[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{X(\Omega)}V(\Omega) d\Omega$
Caso especial del teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(\Omega) ^2 d\Omega$
Relación con la CTFT inversa	Si $x[n] \leftrightarrow X(\Omega)$ y $\gamma(t) \leftrightarrow X(\omega)p_{2\pi}(\omega)$ , entonces $x[n] = \gamma(t) _{t=n} = \gamma(n)$

Fuente: (Kamen & Heck, 2008)

## 5. DISEÑO DE FILTROS.

### 5.1 Introducción

Los filtros digitales de respuesta impulsional finita (FIR) se basan en obtener la salida a partir, exclusivamente, de las entradas actuales y anteriores. Así, para un filtro de longitud  $N$ :

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_{N-1}x(n-N+1) = \sum_{k=0}^{N-1} b_kx(n-k) \quad (5.1)$$

donde los  $\{b_k\}$  son los coeficientes del filtro.

Ante un estímulo impulsional, la respuesta es finita lo que justifica su denominación. La salida  $\{y(n)\}$  puede escribirse como la convolución de la entrada  $\{x(n)\}$  con la respuesta impulsional  $\{h(n)\}$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad \text{con } h(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ h(k) & 0 \leq k < N \\ 0 & k \geq N \end{cases} \quad (5.2)$$

luego la expresión puede reescribirse como:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad (5.3)$$

de donde, identificando (5.16) y (5.17), observamos que  $b_k = \{h(k)\}$ , es decir, los coeficientes del filtro corresponden a la respuesta impulsional.

#### 5.1.1 Filtros de fase lineal.

La ventaja de los filtros FIR pueden diseñarse para que presenten FASE LINEAL. La linealidad de fase implica que se verifiquen ciertas condiciones de simetría:

1. Un sistema no causal con respuesta impulsional conjugada simetría ( $h(n) = h^*(-n)$ ) tiene una función de transferencia real.

2. Un sistema no causal con respuesta impulsional conjugada antisimétrica ( $h(n) = -h^*(-n)$ ) tiene una función de transferencia imaginaria pura.

Es decir, se tendrán fases que pueden ser cero  $0$  ó  $\frac{\pi}{2}$  si queremos que las secuencias sean realizables, las retardaremos un número de muestras adecuado para que se transformen en causales.

Si se consideran sistemas FIR con coeficientes reales, una secuencia conjugada simétrica se dice que es una secuencia PAR, y una secuencia conjugada antisimétrica es una secuencia IMPAR. Dependiendo del número de coeficientes del filtro y del tipo de simetría tenemos varias posibilidades. Como se muestra en la tabla 6

Tabla 6: Tipos de simetría según número de coeficientes.

TIPO	NUMERO DE COEFICIENTE S (N)	SIMETRÍA	
I	Impar	Simétrico $h(k) = h(N - 1 - k)$	
II	Par	Simétrico $h(k) = h(N - 1 - k)$	
III	Impar	No Simétrico $h(k) = -h(N - 1 - k)$	
IV	Par	No Simétrico $h(k) = -h(N - 1 - k)$	

Fuente: Autor.

La respuesta en frecuencia para un filtro de **tipo I**.

Es así que para un filtro de longitud impar y respuesta impulsional simétrica alrededor del punto central, se obtiene:

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(1)z^{-2} + \dots + h(N-1)z^{-(N-1)} \quad (5.4)$$

Con  $h(k) = h(N-1-k)$  y  $N$  impar.

Al sacar factor común  $z^{-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil}$  y se agrupan términos de acuerdo con la simetría

$$H(z) = z^{-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil} \left\{ h(0)z^{\lceil \frac{N-1}{2} \rceil} + h(N-1)z^{-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil} + h(1)z^{\lceil \frac{N-3}{2} \rceil} + h(N-2)z^{-\lceil \frac{N-3}{2} \rceil} + \dots + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\} \quad (5.5)$$

Con lo que, realizando el cambio  $z = e^{j\omega}$  y aprovechando la propiedad de simetría de los coeficientes, la respuesta en frecuencia queda así

$$H(\omega) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left\{ 2h(0)\cos\left(\omega \frac{N-1}{2}\right) + 2h(1)\cos\left(\omega \frac{N-1}{2} - 1\right) + \dots + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\} \quad (5.6)$$

$$H(\omega) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} 2h(k)\cos\left(\omega \frac{N-1}{2} - k\right) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\}$$

Con lo que

$$H(\omega)A(\omega)e^{j\Theta(\omega)} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A(\omega) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} 2h(k)\cos\left(\omega \frac{N-1}{2} - k\right) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \\ \Theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} \end{cases} \quad (5.7)$$

donde  $A(\omega) \in R$ , con lo que toda la información de la fase se encuentra en  $\Theta(\omega)$  que es lineal en  $\omega$ . Por tanto, el retardo de grupo es lineal:

$$\tau(w) = -\frac{d\theta(w)}{dw} = \frac{(N-1)}{2} \quad (5.8)$$

esto significa que, al hacer pasar una señal por un filtro FIR de estas características, el retardo es el mismo para todos los armónicos que componen la señal y ésta no se distorsiona. La magnitud del retardo no depende de los coeficientes del filtro con lo que estos se pueden escoger libremente para modelar la respuesta en amplitud. El retardo introducido por el filtro es,  $(N-1)/2F_s$  segundos.

Para los otros tipos obtenemos las siguientes expresiones:

**Tipo II:**  $h(k) = h(N-1-k)$  y  $N$  par

$$H(w) = A(w)e^{j\theta(w)} \quad \text{con} \begin{cases} A(w) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(k)\cos\left(\frac{N-1}{2} - k\right) \\ \theta(w) = -w\frac{N-1}{2} \end{cases} \quad (5.9)$$

$|H(w)|_{w=\pi} = 0$ . No es adecuado para diseñar filtros pasa alta ni elimina banda

**Tipo III:**  $h(k) = -h(N-1-k)$  y  $N$  impar

$$H(w) = A(w)e^{j\theta(w)} \quad \text{con} \begin{cases} A(w) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} 2h(k)\sen\left(w\frac{N-1}{2} - k\right) \\ \theta(w) = \frac{\pi}{2} - w\frac{N-1}{2} \end{cases} \quad (5.10)$$

$|H(w)|_{w=0} = 0$  y  $|H(w)|_{w=\pi} = 0$ . No es adecuado para diseñar filtros pasa baja ni pasa alta. Se usan para diseñar transformadores de Hilbert (es un tipo de filtro pasa todo que produce un desfase de  $\pi/2$  a la señal de entrada) y diferenciadores (determinan la derivada de la señal de entrada).

**Tipo IV:**  $h(k) = -h(N - 1 - k)$  y  $N$  par

$$H(w) = A(w)e^{j\theta(w)} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A(w) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(k)\text{sen}\left(w\left[\frac{N-1}{2} - k\right]\right) \\ \theta(w) = \frac{\pi}{2} - w\frac{N-1}{2} \end{cases} \quad (5.11)$$

$|H(w)|_{w=0} = 0$ . Como en el caso anterior se utiliza para diseñar transformadores de Hilbert y diferenciadores. La fase indicada en los dos casos anteriores considera que  $A(w)$  es positiva, si es negativa se incluirá un retardo adicional de  $\pi$  resultando  $\theta(w) = \pi - w\left(\frac{N-1}{2}\right)$  para filtros simétricos y  $\theta(w) = \frac{3\pi}{2} - w\left(\frac{N-1}{2}\right)$  para antisimétricos.

Por lo tanto, si se exige que los coeficientes de un filtro FIR presenten simetría par o impar, se asegura la linealidad de la fase y por tanto se evita la distorsión de fase.

### 5.1.2 Ubicación de ceros.

Los filtros FIR solo presentan polos en el origen, por lo que siempre son estables. Sobre el posicionamiento de los ceros, resulta fácil demostrar que en los filtros de fase lineal los ceros se dan en pares recíprocos, es decir, si  $z_0$  es una raíz del polinomio  $H(z)$ , también lo será  $z_0^{-1}$ . Como se ve, a continuación:

La función de transferencia de un filtro FIR es:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k} \quad (5.12)$$

Al sustituir  $z$  por  $z^{-1}$

$$H(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^k = z^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-N+1+k} \quad (5.13)$$

Se realiza un cambio de variable en el índice de la sumatoria de forma que  $k' = N - 1 - k$ ,

$$H(z^{-1}) = z^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} h(N-1-k)z^{-k} \quad (5.14)$$

Si además se trata de un filtro FIR de fase lineal  $h(k) = \pm h(N-1-k)$

$$H(z^{-1}) = z^{N-1}(\pm) \sum_{k=0}^{N-1} h(k')z^{-k} = \pm z^{N-k}H(z) \quad (5.15)$$

de lo que se deriva las raíces del polinomio  $H(z^{-1})$  son también raíces de  $H(z)$ . Si además se quiere que los coeficientes sean reales, las raíces complejas deben aparecer en forma de pares complejo conjugados.

Por ejemplo, el diagrama de ceros y polos del filtro  $y(n) = x(n) - x(n-1) + 2.79x(n-3) - 2.79x(n-4) + x(n-6) - x(n-7)$  es como se aprecia en la figura 37

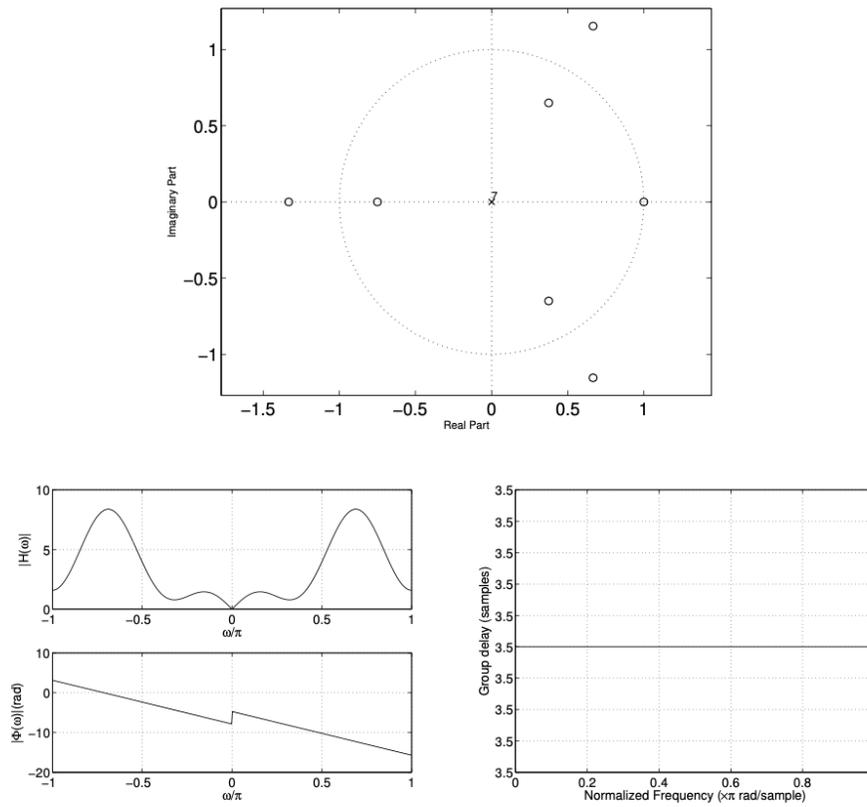


Figura 37: Posiciones de ceros y polos, magnitud y fase y retardos.

Fuente: Autor.

## 5.2 Diseño de filtros FIR

Existen tres grandes bloques de métodos de diseño de filtros FIR con fase lineal:

- Método de las ventanas
- Muestreo en frecuencia
- Rizado constante (equiripple).

El método de las ventanas se basa en acotar la respuesta impulsional infinita de un filtro ideal, el método del muestreo en frecuencia propone que se fijen una serie de puntos de la respuesta en frecuencia del sistema y, a partir de la DFT inversa, obtener los coeficientes del filtro. Por último, existe una familia de métodos que se basan en definir la respuesta en frecuencia ideal del filtro y, fijado un orden, obtener los coeficientes que generen la respuesta más aproximada, en particular, los más comunes se basan en la aproximación de Tchebyshev.

### 5.2.1 Método de las ventanas

Si se quiere implementar un filtro pasa baja con una respuesta ideal (transición abrupta de la banda pasante a la atenuada), la respuesta impulsional es infinita y no causal. Para obtener un filtro FIR realizable se puede proponer truncar  $h(n)$  y retardarla hasta convertirla en causal. La respuesta impulsional del filtro ideal pasa baja viene dada por:

$$h_i(n) = \begin{cases} \frac{w_c \operatorname{sen}(w_c n)}{\pi w_c n}, & n \neq 0 \\ \frac{w_c}{\pi}, & n = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

En la figura 38 se muestran algunas de sus muestras

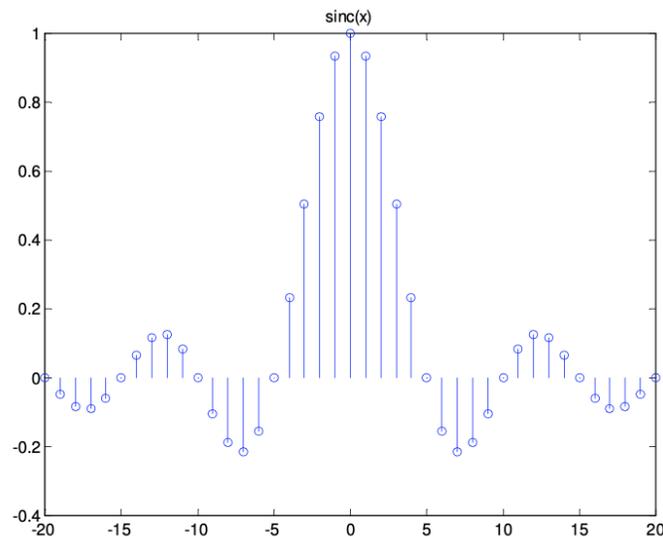


Figura 38: Respuesta al impulso de un filtro paso bajo ideal

Fuente: Autor

El método de las ventanas se basa en truncar la respuesta impulsional infinita de un filtro ideal. El procedimiento es el siguiente (como se ve en la figura 39):

1. Obtener la respuesta impulsional del filtro ideal que deseamos diseñar  $w(n)$  (pasa-baja, pasa-alta, etc.)
2. Enventanar (truncar) dicha respuesta impulsional.  $h(n) = h_i(n)w(n)$ ,  $w(n)$  es la respuesta impulsional de la ventana y  $h_i(n)$  la respuesta del filtro ideal. La respuesta de la ventana debe ser de la forma.

$$w(n) = \begin{cases} \text{función simétrica en el intervalo} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

3. Desplazar la respuesta impulsional enventanada un número adecuado de muestras para hacerla causal. (también se puede desplazar la respuesta impulsional del filtro ideal previamente, para que la secuencia enventanada sea causal)

Como el producto en el dominio del tiempo equivale a una convolución en el dominio de la frecuencia, podemos estudiar el efecto que este enventanado tiene sobre la respuesta frecuencial del filtro.

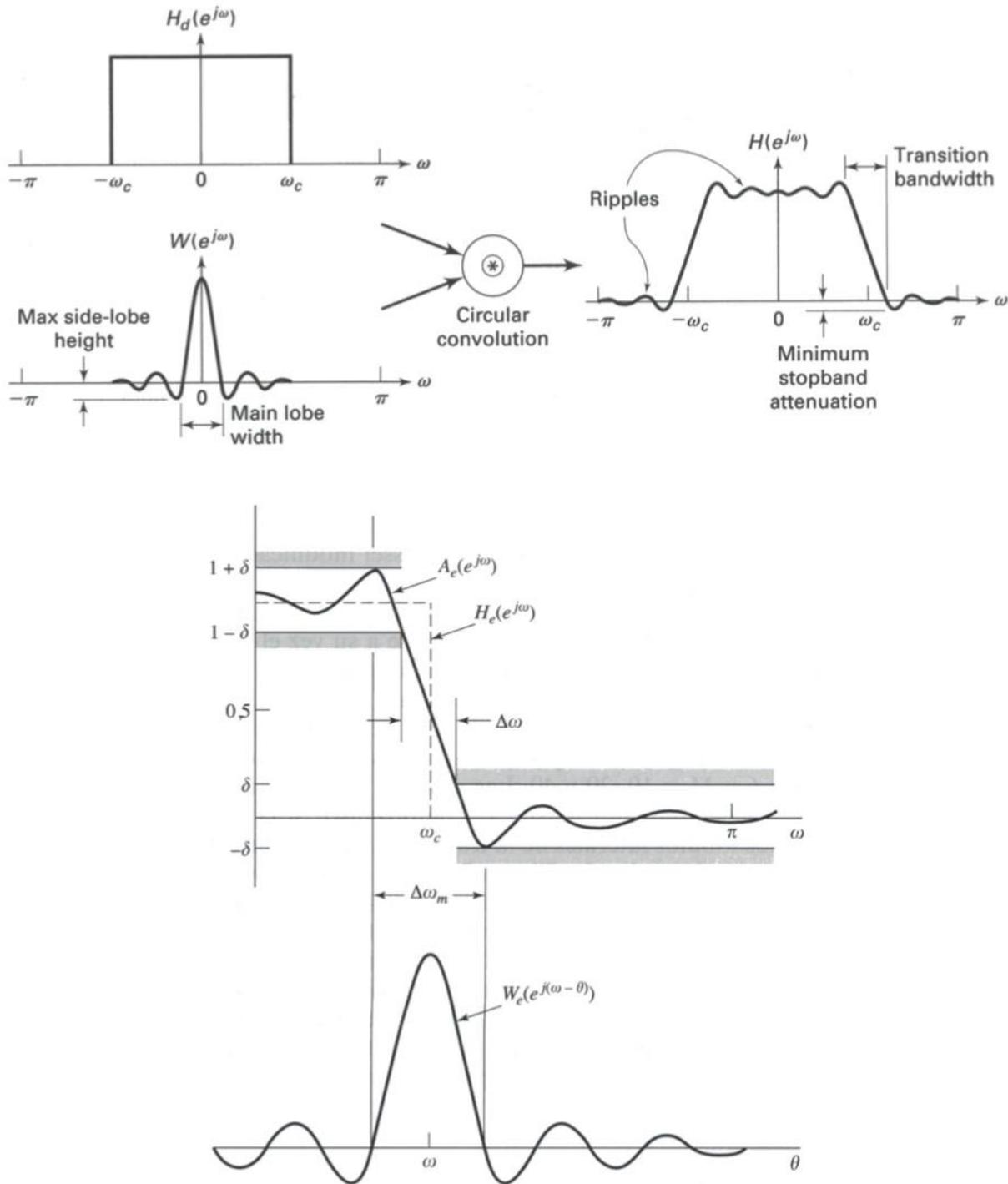


Figura 39: Procedimiento de ventana

Fuente: (Oppenheim & Schaffer)

Se considera la ventana más sencilla; la ventana rectangular. Supongamos que se aplica sobre una versión retardada de la respuesta impulsional ideal. La ventana estará definida como:

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & n \geq N \end{cases} \quad (5. 17)$$

La expresión en el dominio Z es

$$W(z) = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-N+2} + z^{-N+1} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad (5. 18)$$

Es así que la respuesta en frecuencia (ver figura 40) es

$$W(w) = e^{-jw\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\text{sen}\left(\frac{Nw}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{w}{2}\right)} \quad (5. 19)$$

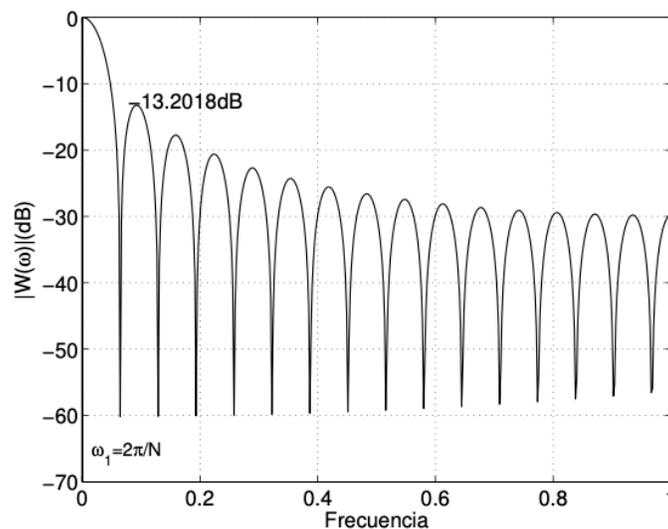


Figura 40:: Respuesta en frecuencia de una ventana rectangular de longitud N=31.

Fuente: Autor

Se define la anchura del lóbulo principal de la ventana como el doble del intervalo de frecuencias hasta el primer nulo que para la ventana rectangular se producen en las frecuencias

$$w_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N - 1 \quad (5. 20)$$

Se ve que el lóbulo principal tiene una anchura que es inversamente proporcional a la longitud de la ventana.

La anchura del lóbulo principal para la ventana es  $\frac{4\pi}{N}$ .

Cuando  $N$  crece, el lóbulo principal se estrecha. Los lóbulos secundarios también se estrechan y se atenúan progresivamente, de forma que, en el límite, cuando  $N$  tiende a infinito, el lóbulo principal es infinitamente estrecho y los secundarios desaparecen dando lugar a una delta, lo que corresponde con el hecho de que una ventana de longitud infinita es una secuencia de valor constante cuyo contenido espectral es nulo salvo para la componente de continua. Dado que la respuesta en frecuencia del filtro diseñado será igual a la convolución en el dominio de la frecuencia de la respuesta en frecuencia del filtro ideal y de la ventana, ésta última jugará un papel determinante en las características del filtro obtenido.

El efecto del enventanado o truncamiento de la respuesta ideal es doble:

- a) Por una parte, la anchura del lóbulo principal está relacionada con la aparición de una banda de transición en el filtro. Cuanto mayor sea el lóbulo principal mayor será la banda de transición del filtro.
- b) Por otra, la presencia de lóbulos laterales (secundarios) lleva a la aparición de un rizado u oscilaciones en la respuesta en frecuencia, en ambas bandas, (más apreciables en la banda no pasante).

A la vista de este análisis, se puede tratar de mejorar las prestaciones del filtro real aumentando el número de puntos considerados, sin embargo, el incremento de la longitud del filtro eleva su carga computacional (idealmente para  $N \rightarrow \infty$  se tendría una señal de continua, cuyo espectro es un impulso, por lo que al convolucionar obtendríamos la respuesta ideal del filtro). Una opción que se plantea es generalizar el concepto de ventana y emplear secuencias distintas de la rectangular para realizar el truncamiento de la respuesta impulsional deseada.

Si se trata de justificar por qué de la aparición de los lóbulos secundarios vemos que se debe a que la ventana rectangular (ver figura 41) presenta una discontinuidad abrupta que, al pasar

al dominio de la frecuencia, conlleva un reparto de la energía por todo el espectro a causa del aliasing. Desde un punto de vista más matemático, en el estudio de las series de Fourier se determinó que si una función con una discontinuidad (filtro ideal) era aproximada mediante series de Fourier aparecen sobreoscilaciones en las proximidades de la discontinuidad. A medida que el número de términos (ventana de mayor longitud) aumenta, el nivel de oscilación va disminuyendo, hasta hacerse cero cuando  $N \rightarrow \infty$ , excepto en la discontinuidad en la que aparece una sobreoscilación de amplitud aproximada igual al 11% de la amplitud en la discontinuidad, tanto en la banda pasante como en la no pasante. Este comportamiento oscilatorio en las proximidades de la discontinuidad se conoce como EFECTO GIBBS (ver figura 41).

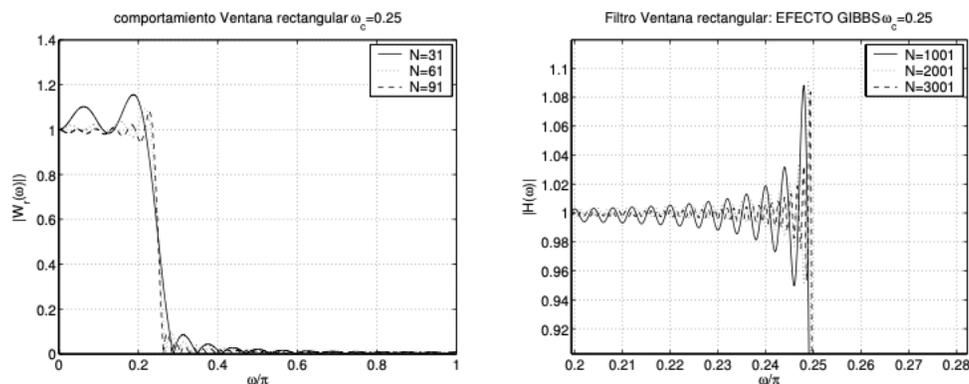


Figura 41: Comportamiento ventana rectangular y EFECTO GIBBS.

Fuente: Autor

Por tanto, si se emplean ventanas cuyos extremos se anulen progresivamente, se consigue que los lóbulos secundarios se atenúen. Sin embargo, esta reducción de los extremos se puede interpretar, intuitivamente, como una reducción de la 'longitud efectiva' de la ventana, con lo que se ensanchará el lóbulo principal. Por tanto, se vislumbra la posibilidad de reducir la energía de los lóbulos secundarios a costa de aumentar la anchura de la zona de transición del filtro.

Son numerosas las funciones planteadas para enventanar la  $h(n)$  ideal y el decidirse por una u otra depende de las características de nuestro problema, es decir, si dada una longitud del filtro, se está más interesado en reducir al máximo la zona de transición (ventana rectangular), atenuar lo más posible los lóbulos secundarios (p.e. ventana Blackman) u optar por una solución de compromiso. La expresión matemática de alguna de las principales ventanas se ve en la tabla 6.

Tabla 7: Funciones de ventana para filtros FIR.

Ventana	Dominio del tiempo $h(n), 0 \leq n \leq N - 1$
Rectangular	$\begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & n \geq N \end{cases}$
Bartlett (triangular)	$1 - \frac{2 \left  n - \frac{N - 1}{2} \right }{N - 1}$
Blackman	$0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N - 1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N - 1}$
Hamming	$0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N - 1}$
Von Hann (Hanning)	$\frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi n}{N - 1} \right)$
Kaiser	$\frac{I_0 \left[ \alpha \sqrt{\left( \frac{N - 1}{2} \right)^2 - \left( n - \frac{N - 1}{2} \right)^2} \right]}{I_0 \left[ \alpha \left( \frac{N - 1}{2} \right) \right]}$
Lanczos	$\begin{cases} \left\{ \frac{\text{sen} \left[ 2\pi \left( n - \frac{N - 1}{2} \right) / (N - 1) \right]}{2\pi \left( n - \frac{N - 1}{2} \right) / \left( \frac{N - 1}{2} \right)} \right\}^L, L > 0 \\ 1, \left  n - \frac{N - 1}{2} \right  \leq \alpha \frac{N - 1}{2}, 0 < \alpha < 1 \end{cases}$
Tukey	$\frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{n - (1 + \alpha)(N - 1)/2}{(1 - \alpha)(N - 1)/2} \pi \right) \right]$ $\alpha(N - 1)/2 \leq \left  n - \frac{N - 1}{2} \right  \leq \frac{N - 1}{2}$

En la siguiente tabla 7 se ve los valores para cada una de las ventanas más usadas.

Tabla 8: Valores que toma el filtro diseñado según la ventana.

Ventana	Anchura del lóbulo principal	Anchura de la banda de transmisión del filtro diseñado	Pico lóbulo secundario de la ventana (dB)	Atenuación del filtro diseñado con la ventana $R_s$ (dB)
Rectangular	$\frac{4\pi}{N}$	$\frac{1.8\pi}{N}$	-13	-21
Barlett (triangular)	$\frac{8\pi}{N}$	$\frac{6.1\pi}{N}$	-25	-25
Von Hann (Hanning)	$\frac{8\pi}{N}$	$\frac{6.2\pi}{N}$	-31	-44
Hamming	$\frac{8\pi}{N}$	$\frac{6.6\pi}{N}$	-41	-53
Blackman	$\frac{12\pi}{N}$	$\frac{11\pi}{N}$	-57	-74

La representación gráfica en el dominio del tiempo y su espectro se observan en la figura 42

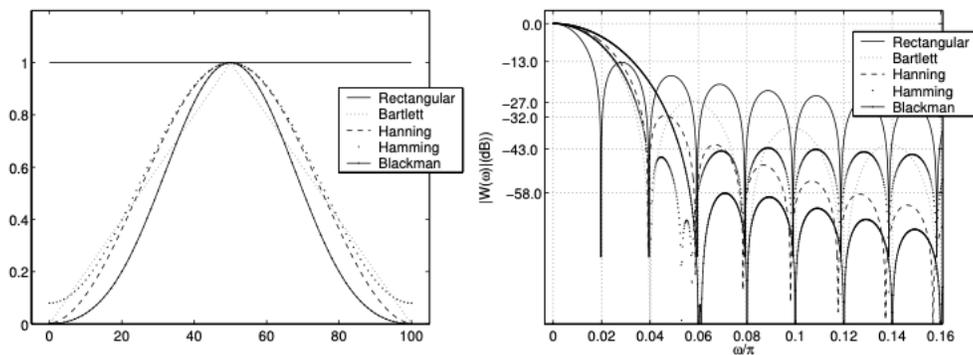


Figura 42: Representación gráfica en el dominio del tiempo y espectro.

Fuente Autor.

Finalmente, se puede ver el resultado de diseñar un filtro FIR paso bajo con frecuencia de corte normalizada de 0.25 y longitud 101 (ver figura 43).

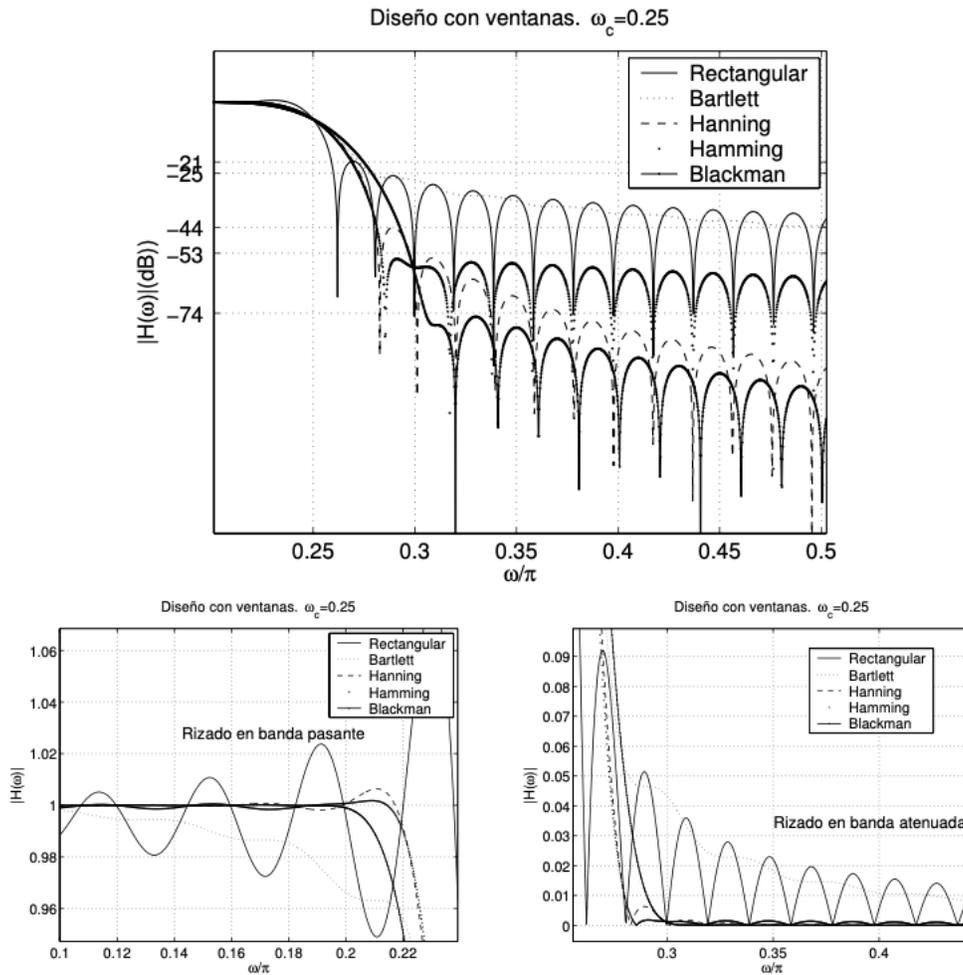


Figura 43: Diseño filtros FIR con frecuencia de corte 0.25 y  $N=101$ .

Fuente: Autor

Otras ventanas:

En las ventanas consideradas, la anchura del lóbulo principal es inversa al valor de  $N$  y la atenuación del lóbulo secundario no depende del orden sino del tipo de ventana. El orden determina la anchura de la banda de transición. Estas ventanas no son muy versátiles para el diseño de filtros ya que no podemos controlar la anchura de la banda de transición y la atenuación independientemente. Existen otro tipo de ventanas como la de Kaiser (ver figura 44), definida con 2 parámetros  $N$  y  $\beta$ , que nos permiten controlar ambos parámetros independientemente. Su definición es más compleja, a partir de funciones de Bessel. La gran utilidad de esta ventana es que existen expresiones aproximadas para la elección de parámetros de diseño, además modificando los valores de  $\beta$  podemos tener formas de la ventana similares a la anteriores.

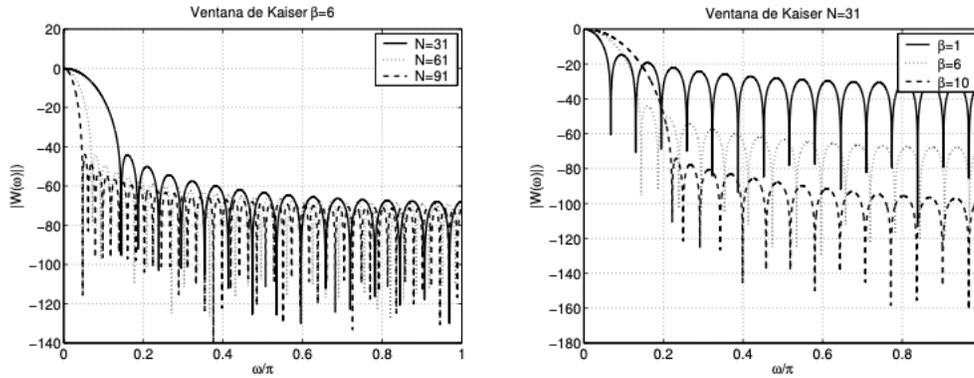


Figura 44: Ventana de Kaiser

Fuente: Autor

Las ecuaciones de diseño son:

Dados  $W_p, W_s, \delta_1, \delta_2$

Para la respuesta del filtro ideal se toma  $W_c = \frac{1}{2}(W_p + W_s)$

$$A = 20 \log_{10}(\min(\delta_1, \delta_2)) \quad (5.21)$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7), & A \geq 50 \text{ dB} \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 < A < 50 \\ 0, & A \leq 21 \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\Delta F = \frac{DF_m}{N - 1} \quad \Delta F = F_s - F_p \quad (5.23)$$

Siendo D

$$D = \begin{cases} \frac{A - 7.95}{14.36} & A > 21 \\ 0.922 & A \leq 21 \end{cases} \quad (5.24)$$

Como resumen, el método de diseño por ventanas se basa en, dada una longitud del filtro  $N$ , obtener los  $N$  términos de la respuesta impulsional del filtro ideal que, al multiplicarlos por la función de pesos (ventana), nos dan los coeficientes del filtro real. Como los términos de la respuesta ideal y las ventanas son simétricos respecto al punto central, el filtro presenta fase lineal.

### 5.2.2 Método del muestreo en frecuencia.

Se va a definir la respuesta en frecuencia de un filtro a partir de fijar  $N$  puntos de  $|H(w)|$ . Para mayor simplicidad, se supone que los puntos escogidos están uniformemente distribuidos por todo el espectro digital. Se puede obtener  $h(n)$  a partir de la Transformada de Fourier inversa de  $\{H(k)\}$ , versión muestreada de la  $H(w)$ .

En un apartado anterior vimos que en función de que la longitud del filtro sea par o impar y la simetría de los coeficientes sea par o impar, tenemos cuatro tipos de filtros, con 4 expresiones de la relación entre  $h(n)$  y  $A(w)$  ( $A(w)$  es la amplitud, que puede ser positiva o negativa pero siempre es una magnitud real) que presentan unas relaciones de simetría interesantes (ver tabla 8 y figura).

Tabla 9: Relaciones de simetría según el tipo.

Tipo	Longitud	Coeficientes	Simetría en $w = 0$	Simetría en $w = \pi$	Periodicidad
I	Impar	Simétricos	Par $A(w) = A(-w)$	Par $A(\pi + w) = A(\pi - w)$	$2\pi$
II	Par	Simétricos	Par $A(w) = A(-w)$	Impar $A(\pi + w) = -A(\pi - w)$	$4\pi$
III	Impar	No simétricos	Impar $A(w) = -A(-w)$	Impar $A(\pi + w) = -A(\pi - w)$	$2\pi$
IV	Par	No simétricos	Impar $A(w) = -A(-w)$	Par $A(\pi + w) = A(\pi - w)$	$4\pi$

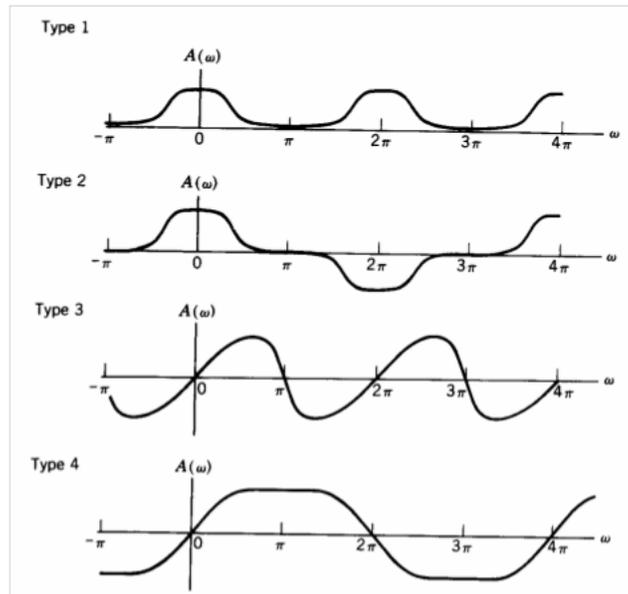


Figura 45: Simetría según el tipo.

Fuente: Autor

Diseño para un filtro tipo I:

$$\begin{aligned}
 h(n) &= IDFT\{H(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N} (n - \frac{N-1}{2})} \\
 &= \frac{1}{N} \left\{ A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} (n - \frac{N-1}{2})} + \sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{N-1} A(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} (n - \frac{N-1}{2})} \right\} \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

haciendo el cambio en el índice del segundo sumatorio con  $k' = N - k$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 h(n) &= \frac{1}{N} \left\{ A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} (n - \frac{N-1}{2})} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k'=1}^{\frac{N-1}{2}} A(N - k') e^{-j2\pi \frac{k'}{N} (n - \frac{N-1}{2})} e^{j2\pi (n - \frac{N-1}{2})} \right\} \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

Como  $A(k)$  es simétrico respecto al punto medio  $w = \pi$ :

$$h(n) = \frac{1}{N} \left\{ A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} (n - \frac{N-1}{2})} + \sum_{k'=1}^{\frac{N-1}{2}} A(k') e^{-j2\pi \frac{k'}{N} (n - \frac{N-1}{2})} \right\} \quad (5.27)$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A(k) \left[ e^{j2\pi \frac{k}{N} (n - \frac{N-1}{2})} + e^{-j2\pi \frac{k}{N} (n - \frac{N-1}{2})} \right] \right\}$$

con lo que:

$$h(n) = \frac{1}{N} \left\{ A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2A(k) \cos \left[ 2\pi \frac{k}{N} \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \right] \right\} \quad (5.28)$$

Para el resto de tipos, se obtienen expresiones similares (muestras igualmente espaciadas y la primera en  $w = 0$ ) como se ve en la tabla 9:

Tabla 10: Expresiones para los diferentes tipos.

Tipo I	Longitud: Impar. Simetría: Par	$h(n) = \frac{1}{N} \left\{ A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2A(k) \cos \left[ 2\pi \frac{k}{N} \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \right] \right\}$
Tipo II	Longitud: Par. Simetría: Par	$h(n) = \frac{1}{N} \left\{ A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2A(k) \cos \left[ 2\pi \frac{k}{N} \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \right] \right\}$
Tipo III	Longitud: Impar. (N es impar) Simetría: Impar	$h(n) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2A(k) \sin \left[ 2\pi \frac{k}{N} \left( \frac{N-1}{2} - n \right) \right] \right\}$
Tipo IV	Longitud: par. (N es par) Simetría: Impar	$h(n) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2A(k) \sin \left[ 2\pi \frac{k}{N} \left( \frac{N-1}{2} - n \right) \right] \right\} + A\left(\frac{N}{2}\right) \sin \left[ \pi \left( \frac{N-1}{2} - n \right) \right]$

Con este método de diseño, obtenemos un filtro cuya respuesta en frecuencia pasa por los puntos fijados, sin embargo, en principio no controlamos el resto de los valores de la respuesta. Veamos la transformada Z del filtro definido para interpretar el método del muestreo uniforme en frecuencia desde otro punto de vista:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{r=0}^{N-1} h(r)z^{-r} = \sum_{r=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kr} \right] z^{-r} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \sum_{r=0}^{N-1} \left[ e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right]^{-r} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1 - \left[ e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right]^N}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

es decir,  $H(z)$  puede obtenerse a partir de una fórmula de interpolación de los valores de  $H(k)$  fijados para la obtención del filtro. La expresión de  $H(z)$  indica que ésta se puede expresar como una descomposición en cascada de dos filtros. A su vez el segundo filtro está expresado como una descomposición en paralelo que tendrá tantos términos como valores no nulos tenga  $H(k)$ . Si se trata de filtros en los que la banda de paso es estrecha, el número de muestras no nulas será pequeño por lo que esta estructura será más eficiente que estructuras directas. La desventaja es que se pueden originar inestabilidades si por efectos de redondeo la cancelación polo-cero no es exacta, ya que se está implementando este filtro FIR de forma recursiva.

En las siguientes figuras (46 a 49) se mostrará un ejemplo de diseño de filtros FIR de fase lineal, por el método del muestreo en frecuencia, para cada uno de los cuatro tipos posibles.

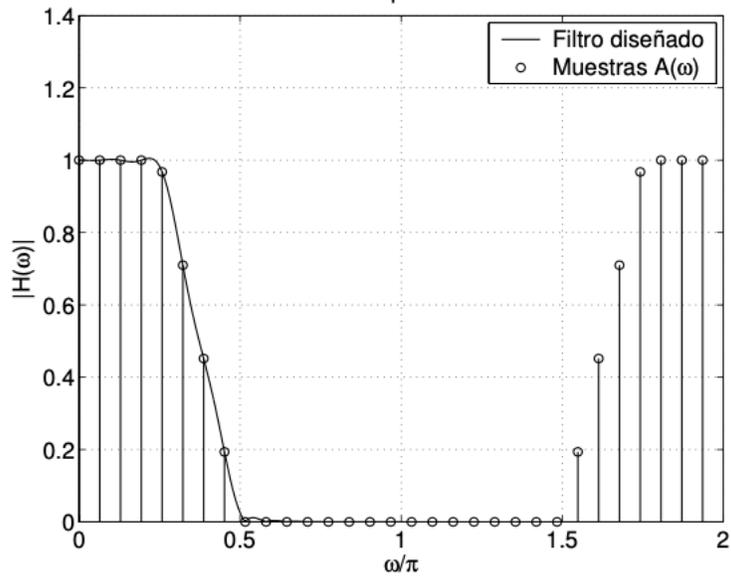


Figura 46: Tipo I

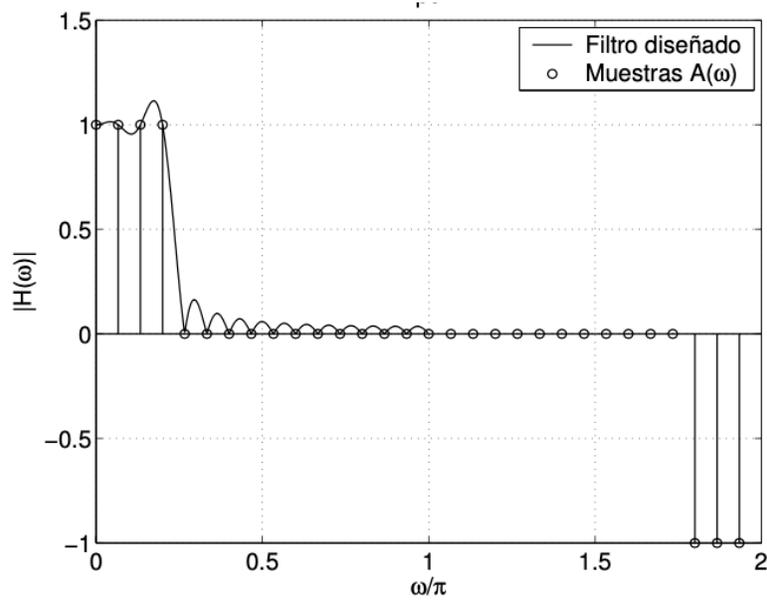


Figura 47: Tipo II

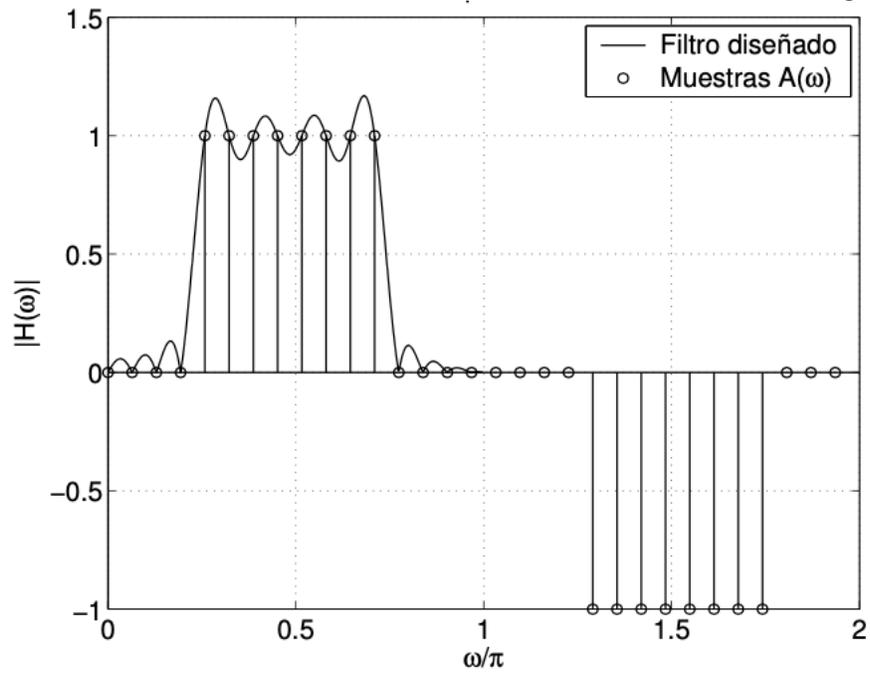


Figura 48: Tipo III

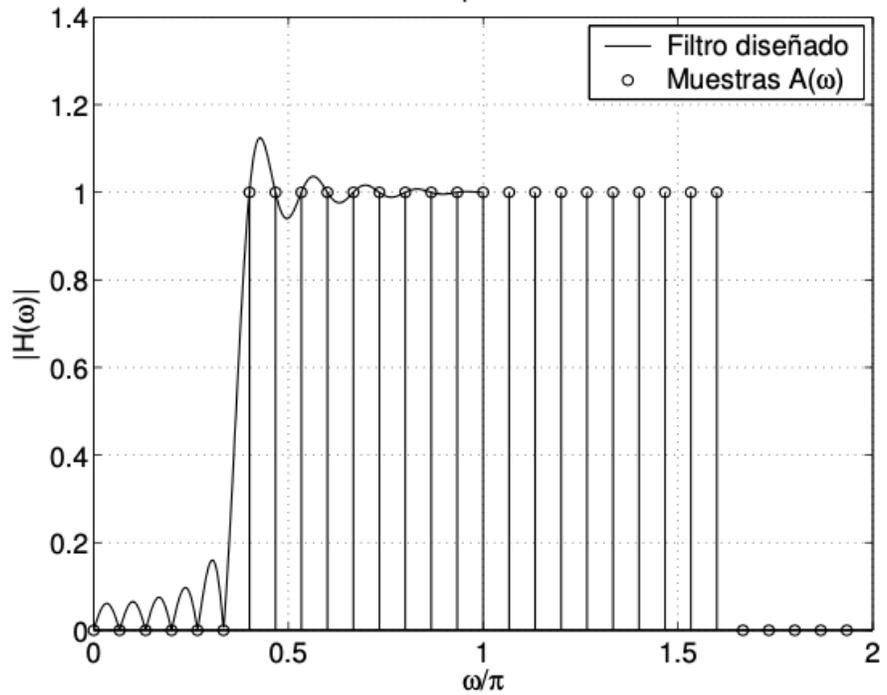


Figura 49: Tipo IV

### Utilización de método:

- Dada la respuesta ideal del filtro, elegir la longitud y tomar N muestras equiespaciadas en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .
- Utilizar las fórmulas explícitas dadas anteriormente o la transformada discreta de Fourier inversa (Matlab) para determinar  $h(n)$ . (Este último proceso no tiene en cuenta la simetrías, pero existen variantes rápidas, `ifft()` que permite hacer este cálculo eficientemente)

### Características del filtro diseñado:

- El error de aproximación (diferencia entre el filtro ideal y el diseñado) es cero en las frecuencias muestreadas.
- El error de aproximación en el resto de frecuencias depende de la respuesta ideal. Transiciones bruscas en la respuesta en frecuencia implican mayores errores.
- El error es mayor en los límites de las bandas y menor dentro de ellas.

El problema que se presenta es la aparición de rizado y sobreoscilaciones en los puntos de discontinuidad de la respuesta deseada y que son, a priori, difíciles de evaluar. La solución es ampliar la zona de transición, evitando la caída abrupta, para ello se puede optar por transiciones más suaves entre bandas, tal como se ha hecho en el diseño del filtro de tipo I.

Otra posibilidad es dejar sin fijar uno o dos puntos en la zona de transición y definir un procedimiento de cálculo que localice estos puntos minimizando el rizado en las bandas pasante y no pasante.

Hasta aquí se ha considerado el caso de fijar N puntos equidistantes en el espectro y tal que el primer punto coincida con el nivel de continua, sin embargo, existen otras posibilidades como el tomar otro origen para fijar los puntos o permitir la selección de puntos irregularmente distribuidos a lo largo del espectro, seleccionar zonas 'no importa' en las cuales no imponemos condiciones, etc.

### 5.2.3 Diseño por aproximación de Tchebyshev

Los métodos anteriores son sencillos de implementar, pero tienen desventajas, ya que no se pueden especificar  $w_p$  y  $w_s$  de forma precisa. Los valores de  $\delta_1$  y  $\delta_2$  no se pueden elegir independientemente. (En el método de las ventanas  $\delta_1 = \delta_2$ , y en el método del muestreo en frecuencia en el mejor de los casos existen métodos para optimizar respecto de  $\delta_2$ ), además el rizado no se distribuye uniformemente en las bandas. Si el error se distribuye uniformemente podemos diseñar filtros que verifican las especificaciones con menor orden. El método que lleva a cabo esta distribución del error se denomina Método de diseño de filtros óptimos de rizado constante.

Se plantea el diseño del filtro como un problema de aproximación de Tchebyshev, para ello se propone un criterio de diseño óptimo, en el sentido de que el error de aproximación entre la respuesta en frecuencia ideal y la real se reparten uniformemente en cada banda, pasante y atenuada (de ahí el apelativo de equiripple), minimizando el error máximo en cada una de ellas. El filtro resultante presenta, pues, rizado en ambas bandas.

Para el diseño se consideran 5 características:

1.  $N$  el orden del filtro.
2.  $w_p$  límite superior de la banda pasante
3.  $w_s$  límite inferior de la banda atenuada
4.  $\delta_1$  máximo rizado de la banda pasante
5.  $\delta_2$  mínima atenuación de la banda atenuada.

El problema se plantea como la minimización de una función de error definida como

$$E(w) = W(w)[H_D(w) - H(w)] \quad (5.29)$$

$$H_D(w) : \text{respuesta del filtro ideal} \quad (5.30)$$

$$W(w) : \text{función de coeficientes para especificar el error permitido en cada banda} \quad (5.31)$$

Dada esta función de error el objetivo es hallar los coeficientes  $h(n)$  que minimizan el valor de  $E(w)$  en toda la banda, permitiendo un valor máximo del error específico dado por  $\delta_1$  y  $\delta_2$

$$\min_{\text{coeficientes}} \left[ \max_w |E(w)| \right]^1 \quad (5.32)$$

## 5.2.4 Comparación entre los distintos métodos de diseño

### MÉTODO DE LAS VENTANAS

- Históricamente, fue el primero en aparecer, los otros dos se desarrollaron en la década de los '70.
- No fija de manera adecuada las frecuencias críticas  $w_p$  y  $w_s$  ya que éstas dependen del tipo de ventana y de la longitud seleccionada.

### MUESTREO EN FRECUENCIA

- Controlamos perfectamente la anchura de la zona de transición, ya que es igual a  $2\pi/N$ .
- Hay procedimientos rápidos para el cálculo de los coeficientes, bien basándose en la FFT, bien con las ecuaciones propuestas anteriormente. Especialmente interesante si la mayor parte de los puntos el módulo de la ganancia son cero o uno.
- Como inconveniente, se tiene un pobre control de la respuesta fuera de esos puntos y el procedimiento puede convertirse en un esquema de prueba y error.

### APROXIMACIÓN DE TCHEBYSHEV

- Permite un control total de las características del filtro en cuanto a frecuencias, ganancias y longitud.
- No existe una forma fácil de optimizar el diseño respecto a la longitud del filtro, aunque existen aproximaciones como la de Kaiser:

$$\hat{N} = \frac{-20 \log_{10}(\sqrt{\delta_1 \delta_2}) - 13}{14.6 \Delta f} + 1 \quad \text{con } \Delta f = \frac{w_s - w_p}{2\pi} \quad (5.33)$$

O la más compleja, pero precisa, de Hermann

$$\hat{N} = \frac{D_\infty(\delta_1, \delta_2) - f(\delta_1, \delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f} + 1 \quad (5.34)$$

Donde ,  $D_{\infty}(\delta_1, \delta_2) = [0.005309(\log_{10}\delta_1)^2 + 0.07114(\log_{10}\delta_1) - 0.4761](\log_{10}\delta_2) - [0.00266(\log_{10}\delta_1)^2 + 0.5941(\log_{10}\delta_1) + 0.4278]$

$$f(\delta_1, \delta_2) = 11.012 + 0.51244(\log_{10}\delta_1 - \log_{10}\delta_2) \quad (5.35)$$

### 5.3 DISEÑO DE FILTROS IIR

Son sistemas cuya salida depende no sólo de salidas anteriores, sino además estando en reposo, al ser estimulados con una entrada impulsional, su salida no vuelve al reposo, de ahí el calificativo de filtros de respuesta impulsional infinita (IIR). La ecuación en diferencias general es de la forma:

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_Mx(n-M) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2) - \dots \\ &\quad - a_Ny(n-N) = \\ &= \sum_{k=0}^M b_kx(n-k) - \sum_{k=1}^N a_ky(n-k) \end{aligned} \quad (5.36)$$

El orden lo dan los valores máximos que toman M y N.

La función de transferencia en Z es

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_kz^{-k}}{\sum_{k=1}^N a_kz^{-k}} \quad (5.37)$$

Hay sistemas que pueden tener esta forma, pero no los hace IIR como es

$$y(n) = y(n-1) + 0.2x(n) - 0.2x(n-5) \quad H(z) = 0.2 \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}}$$

Aparentemente es un filtro IIR ya que tiene términos recursivos, pero se ve que ésta no es sino una forma distinta de representar el sistema:

$$y(n) = 0.2x(n) + 0.2x(n-1) + 0.2x(n-2) + 0.2x(n-3) + 0.2x(n-4)$$

Donde se evidencia que es de fase lineal

Comparado con un FIR, un filtro IIR requiere un orden mucho menor para cumplir las especificaciones de diseño, sin embargo, estos últimos no pueden diseñarse para tener fase lineal. Existen técnicas de compensación de fase mediante la utilización de filtros pasa todo, sin embargo, esto aumenta la longitud total del filtro.

Si no es necesario que el sistema sea causal (no funcionará en tiempo real) se puede conseguir fase lineal mediante filtros IIR realizando un filtrado BIDIRECCIONAL este consiste en filtrar la señal, invertir el orden de las muestras obtenidas y volver a filtrar de nuevo. La señal obtenida no tendrá distorsión de fase.

Hay dos formas para el diseño de filtros IIR

1. **INDIRECTA:** Es aquella que se aplica a filtros analógicos previamente diseñados, realizando transformaciones para convertirlos en digitales con iguales características. Los métodos fundamentales son:
  - Impulso invariante
  - Por analogía o por aproximación de derivadas
  - Transformación bilineal
2. **DIRECTA:** Se impone una serie de condiciones a las respuestas para los valores de los coeficientes. Centrándose en dos métodos:
  - Aproximación de Padé
  - Aproximación de mínimos cuadrados

Aun que es un método poco usado también se encuentra el diseño por ubicación de ceros y polos.

### **5.3.1 Localización de ceros y polos para filtros IIR**

Los filtros IIR más generales (ARMA (modelos autorregresivos de media móvil)) contienen ceros y polos. Si los coeficientes del filtro son reales, si los ceros o polos son complejos siempre aparecen como pares complejos conjugados.

La condición de estabilidad, para sistemas causales implica que los POLOS se encuentran en el interior de la región de convergencia. Los ceros no tienen efecto sobre la estabilidad del sistema y pueden encontrarse en el interior o en el exterior de dicha región.

Cuando los ceros y polos de un sistema se encuentran en el interior de la región de convergencia se dice que el sistema es de FASE MÍNIMA.

Cuando todos los ceros y polos están en el exterior de la de la región de convergencia se dice que el sistema es de FASE MÁXIMA.

En general, cuando se tienen ceros y polos en el exterior y en el interior se dice que el sistema es de FASE MIXTA.

Es fácil verificar que si un sistema tiene un cero en el exterior de la ROC ( $z_k = a \quad |a| > 1$ ) y este se sustituye por su recíproco conjugado ( $z_k = \left(\frac{1}{a}\right)^* \quad |a| > 1$ ) el sistema tiene la misma respuesta en frecuencia en módulo multiplicado por un factor constante igual al módulo de cero, si bien la respuesta en fase sí experimenta cambios.

Un sistema de FASE MÍNIMA también se define como aquel que experimenta un cambio de fase neto nulo; es decir,  $\Phi(\pi) - \Phi(0) = 0$

### 5.3.2 Método a partir de prototipos analógicos.

#### A) Aproximación impulso invariante.

Se diseña un filtro digital IIR cuya respuesta impulsional,  $h(n)$ , sea la versión muestreada de la respuesta impulsional del filtro analógico equivalente:  $h_d(n) = h_a(nT)$ , con  $n = 0,1,2,..$

Se tiene en cuenta el caso de partir de un filtro analógico con N polos simples.

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (5. 38)$$

La respuesta al impulso  $h_a(t)$  es

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} \quad \Rightarrow \quad h_d(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} \quad (5. 39)$$

Es así que, al considerar que el filtro es causal, la transformada Z del filtro digital es

$$H(z) = TZ[h(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k n T} \right] z^{-n} = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (5.40)$$

Por tanto, se detectan los polos del filtro analógico  $\{s_k\}$ , se descompone  $H(s)$  como suma de monomios y se obtiene  $H(z)$ .

Al comparar (4.39) y (4.41) se observa que por cada polo en  $s_k$  se tiene un polo en  $z_k = e^{s_k T}$

El efecto que tiene la transformación sobre la posición de los polos al pasar del dominio de Laplace al Z (ver figura 50) es

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{(s - p_i)} \Rightarrow H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{(1 - z^{-1} e^{p_i T})} \quad (5.41)$$

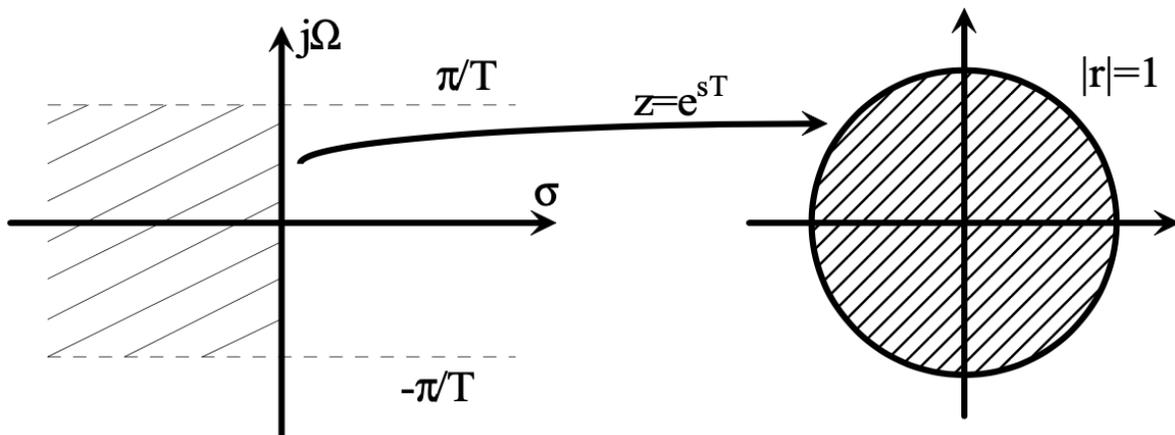


Figura 50: Transformación de Laplace a Z

Fuente: (Chen , 2009)

Características:

- En ambos filtros se mantiene la respuesta al impulso
- Se mantiene la estabilidad (Filtros analógicos estables dan lugar a filtros digitales estables)
- La relación entre frecuencia es lineal pues:

$$\text{Analógico:} \quad s_k = j\Omega \quad (5.42)$$

$$\text{Digital:} \quad \left. \begin{array}{l} z = e^{s_k T} = e^{j\Omega T} \\ z = e^{jw} \end{array} \right\} \rightarrow w = \Omega T \quad (5.43)$$

Desventajas:

Dado que este método produce un “mapeado muchos a uno”; se va a producir aliasing. Esto es sencillo de ver si se tiene en cuenta que se está muestreando la respuesta impulsional del filtro analógico. El contenido frecuencial de  $h(n)$ , es la respuesta en frecuencia del filtro analógico. Se sabe que en los filtros ideales su respuesta no puede ser cero en una banda por lo que independientemente del valor de T, siempre habrá una contribución de  $H(\Omega)$ , que no verificará el teorema de muestreo. Si la frecuencia de muestreo es  $\Omega_s = 2\pi F_s$ , todas las frecuencias analógicas por encima de  $\Omega_s/2$  producirán aliasing. Para que el método funcione adecuadamente el filtro analógico debe verificar  $H(\Omega) \cong |\Omega| > \frac{\Omega_s}{2}$ . Por esta razón este método no es adecuado para el diseño de filtros pasa-alta ni elimina-banda. Además, si se tiene en cuenta los prototipos analógicos considerados, los filtros de Tchebyshev II y los Elípticos presentarán peor comportamiento debido al rizado en la banda no pasante.

## B) Aproximación por analogía (derivadas).

La idea es establecer una analogía entre el operador diferencial en el dominio de Laplace y el dominio Z.

- En sistemas analógicos, el diferencial es:  $H(s) = s$
- En sistemas discretos se puede realizar una primera aproximación de la derivada que es la llamada ‘backward difference’ y que se define como:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \frac{y(nT) - y(nT - T)}{T} = \frac{y(n) - y(n - 1)}{T} \quad (5.44)$$

Su transformada Z queda

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (5.45)$$

Así que igualando términos (ver figura 51)

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{1 - sT} \quad (5.46)$$

El efecto que tiene la transformación sobre la posición de los polos al pasar al dominio Z des pues de Laplace es el siguiente

Si se hace un cambio de  $s = \sigma + j\Omega$   $z = \frac{1}{1 - (\sigma + j\Omega)T}$

Se tiene

$$\begin{aligned} \sigma = 0 \quad \Omega = 0 &\rightarrow z = 1 \\ \sigma = 0 \quad \Omega = +\infty &\rightarrow z = 0^- \\ \sigma = 0 \quad \Omega = -\infty &\rightarrow z = 0^+ \\ \sigma < 0 \quad \Omega &\rightarrow |z| < 1 \end{aligned}$$

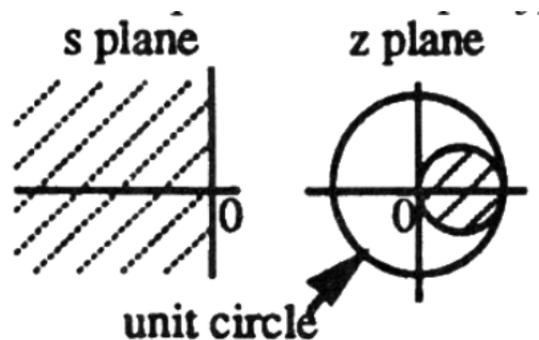


Figura 51: Transformación paso dominio s a dominio z

Fuente: (Chen , 2009)

Como se ve en la figura 51, la limitación es evidente puesto que, partiendo de filtros analógicos estables, no pueden diseñarse filtros pasa alta, al no poder ubicar polos fuera del circulo sombreado.

Otra posibilidad sería plantear alguna otra aproximación al operador diferencial como por ejemplo el cálculo de la derivada a partir de la 'forward difference'

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \frac{y(nT + T) - y(nT)}{T} = \frac{y(n + 1) - y(n)}{T} \quad (5. 47)$$

que genera una relación de la forma:

$$s = \frac{z - 1}{T} \quad \Rightarrow \quad z = 1 + sT \quad (5. 48)$$

que, observando el efecto que esta transformación tiene sobre la posición de los polos al pasar del dominio de Laplace al Z (ver figura 52), no da lugar a un método de interés puesto que filtros analógicos estables no siempre da lugar a filtros digitales estables.

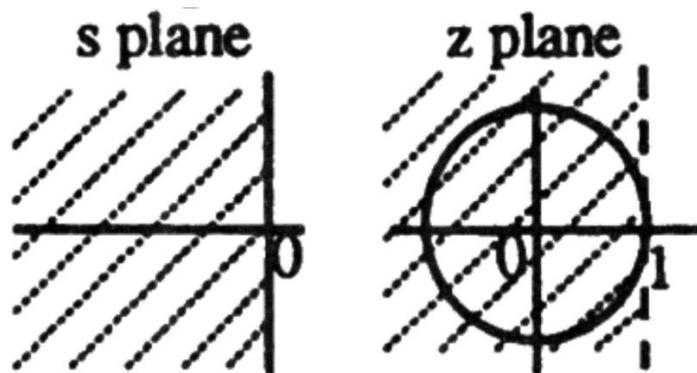


Figura 52: Tranformación posición de polos del plano s a z.

Fuente: (Chen , 2009)

### C) Transformación bilineal

Ninguno de los métodos anteriores parece resolver de forma adecuada la transformación del dominio analógico a la digital. Hay que ver qué condiciones debería cumplir una transformación para ser óptima:

1. Dada una función real y racional en S, la función resultante en Z, será también racional y con coeficientes reales.

2. Dado un filtro analógico estable, el filtro digital resultante también lo será (el semiplano izquierdo del dominio de Laplace debe transformarse dentro del círculo de radio unidad en el dominio Z).
3. En particular, interesa una función reactancia que haga corresponder al eje imaginario del plano de Laplace, la circunferencia de radio unidad.
4. Dado un orden del filtro analógico, el filtro digital resultante será del mismo orden.

Existe una relación que cumple todas estas condiciones, la llamada transformación bilineal:

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \quad (5.49)$$

Así como en la transformación del impulso invariante el filtro analógico y digital tienen la misma respuesta impulsiva, la transformación bilineal asegura que ambos filtros tienen una respuesta aproximadamente idéntica ante cualquier excitación.

Uno de los procedimientos para justificar esta expresión es obtener el equivalente digital de un integrador analógico.

$$H(s) = \frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (5.50)$$

La salida ante una excitación viene dada por  $y(t) = x(t) * h(t)$

La convolución para una señal continua está dada por:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad \text{para } 0 < \tau < t_1, t_2 \quad (5.51)$$

Se tiene

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_0^{t_2} x(\tau)h(t_2 - \tau)d\tau - \int_0^{t_1} x(\tau)h(t_1 - \tau)d\tau \quad (5.52)$$

Como

$$0 < \tau < t_1, t_2 \quad h(t_2 - \tau) = h(t_1 - \tau) = 1 \quad \rightarrow \quad y(t_2) - y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x(\tau) d\tau \quad (5.53)$$

Si se aproxima la integral usando el método de los trapecios se obtendría:

$$y(t_2) - y(t_1) \cong (t_2 - t_1)x(t_1) + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)[x(t_2) - x(t_1)] \quad (5.54)$$

$$y(t_2) - y(t_1) \cong \left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)[x(t_2) + x(t_1)] \quad (5.55)$$

Si se hace  $t_2 = nT$      $t_1 = nT - T$

$$y(nT) - y(nT - T) \cong \left(\frac{T}{2}\right)[x(nT) + x(nT - T)] \quad (5.56)$$

Al tomar la transformada z

$$H(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (5.57)$$

Comparando con (4.50) se obtiene la relación entre las variables s y z dada por:

$$\text{TRANSFORMACIÓN BILINEAL} \quad s = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \quad z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s} \quad (5.58)$$

Dado que se ha obtenido esta expresión considerando el mismo comportamiento del integrador para cualquier entrada, al filtro digital se le supone el mismo comportamiento. La diferencia entre el filtro analógico y el digital decrece a medida que  $T \rightarrow 0$ , ya que la aproximación de los trapecios es más exacta.

El efecto que tiene esta transformación sobre la posición de los polos al pasar del dominio de Laplace al Z es el siguiente

Se supone

$$s = \sigma + j\Omega \quad y \quad z = re^{jw} \quad (5.59)$$

Es así que

$$s = \frac{2z-1}{Tz+1} = \frac{2}{T} \left( \frac{r^2-1}{1+2r\cos w + r^2} + j \frac{2r\sin w}{1+2r\cos w + r^2} \right) \quad (5.60)$$

Con lo que

$$\sigma = \frac{2}{T} \left( \frac{r^2-1}{1+2r\cos w + r^2} \right) \quad y \quad \Omega = \frac{2}{T} \left( \frac{2r\sin w}{1+2r\cos w + r^2} \right) \quad (5.61)$$

Además

$$r = \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{T} + \sigma\right)^2 + \Omega^2}{\left(\frac{2}{T} - \sigma\right)^2 + \Omega^2}} \quad w = \tan^{-1} \left( \frac{\Omega}{\frac{2}{T} + \sigma} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{\Omega}{\frac{2}{T} - \sigma} \right) + \quad (5.62)$$

Es así que se deduce

$$\begin{aligned} \sigma > 0 &\rightarrow r > 1 \\ \sigma = 0 &\rightarrow r = 1 \\ \sigma < 0 &\rightarrow r < 1 \end{aligned}$$

Es decir (ver figura 53),

- El semiplano izquierdo ( $\sigma > 0$ ) se transforma en el interior de la circunferencia unidad, luego un sistema analógico estable da lugar a un sistema digital estable.
- El eje imaginario ( $\sigma = 0$ ) se transforma en la circunferencia unidad

$$\sigma = 0 \rightarrow r = 1 \quad w = 2 \tan^{-1} \left( \frac{T\Omega}{2} \right) \quad \begin{aligned} \Omega \rightarrow +\infty &\Rightarrow w \rightarrow \pi \\ \Omega \rightarrow -\infty &\Rightarrow w \rightarrow -\pi \end{aligned}$$

Esta relación entre frecuencias nos asegura que si  $\Omega_1 < \Omega_2 \rightarrow w_1 < w_2$ ; es decir un pasa-baja analógico dará lugar a un pasa-baja digital, y análogamente con el resto de prototipos.

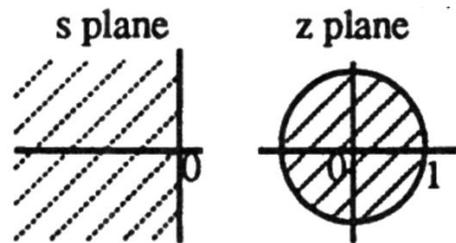


Figura 53: transformación dominio s a z

Fuente: (Chen , 2009)

La relación entre las frecuencias analógica y digital es **no lineal** y está dada por (ver figura 54):

$$w = 2 \tan^{-1} \left( \frac{T\Omega}{2} \right) \quad \Omega = \frac{2}{T} \tan \left( \frac{w}{2} \right) \quad \text{donde} \quad w = 2\pi \frac{F}{F_s} \quad (5.63)$$

Es decir, se lleva a cabo una compresión de las frecuencias analógicas. Este proceso de “Deformación” es lo que se denomina *warping*.

Si se tiene que diseñar un filtro digital con una frecuencia de corte  $w_c$  se debe partir de un filtro analógico de frecuencia de corte  $\Omega_c = \frac{2}{T} \tan \left( \frac{w_c}{2} \right)$ , de manera que al realizar la transformación bilineal la frecuencia de corte sea la correcta. El proceso de obtención de las frecuencias analógicas adecuadas se denomina *prewarping*.

Como consecuencia de esta relación no lineal entre frecuencias los filtros diseñados por la Transformación bilineal verán modificada su respuesta en fase; es decir, si el filtro analógico presenta fase lineal el filtro digital no la presentará.

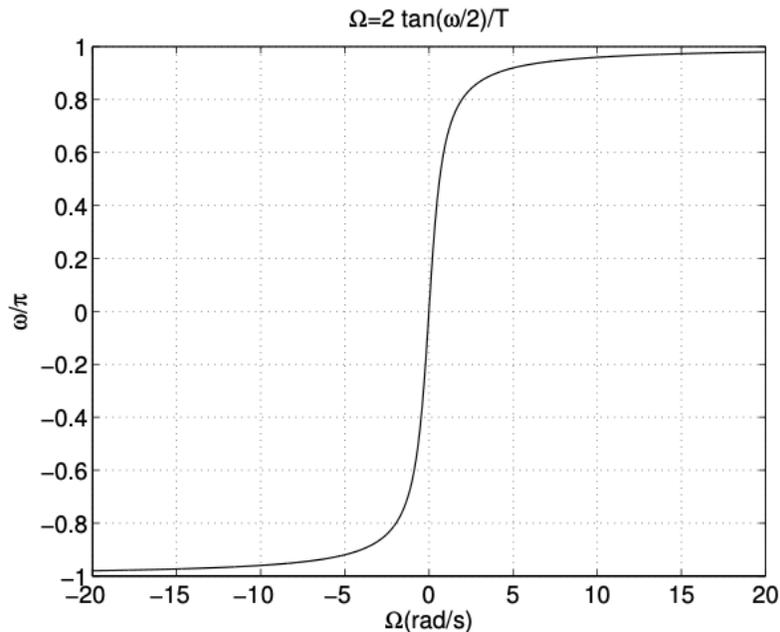


Figura 54: Relación frecuencias analógica y digital.

Fuente: Autor

La transformación bilineal realiza un “mapeado”, entre los dominios de S y Z con una correspondencia 1 a 1 debido a la compresión de frecuencias (prewarping), por esta razón no se produce aliasing como ocurre con el método del impulso invariante.

#### D) Transformada Z adaptada

Este procedimiento se puede considerar como una variación del impulso invariante.

Dada una función de transferencia en el dominio de Laplace, factorizada

$$H(s) = G \frac{\prod_{i=1}^M (s - q_i)}{\prod_{i=1}^M (s - p_i)} \quad (5. 64)$$

Se realiza la transformación a digital de acuerdo al método utilizado por el impulso invariante para transformar cada uno de los polos. Da lugar a una expresión del tipo

$$H(z) = b_0(z + 1)^L \frac{\prod_{i=1}^M (z - e^{q_i T})}{\prod_{i=1}^M (z - e^{p_i T})} \quad (5. 65)$$

$L$  es el número de ceros en el infinito de  $H(s)$

Esta transformación da lugar a filtros digitales estables, pero produce *aliasing* como ocurre con el método del impulso invariante.

### E) Mapeado de polos y ceros.

La transformación bilineal, si se hacen los cálculos manualmente es tediosa de aplicar, por lo que se suele recurrir a una aproximación más sencilla. Dada  $H(s)$  en (5.62) como la relación entre  $s$  y  $z$  para la transformación bilineal viene dada por

$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s} \quad (5. 66)$$

Se puede determinar las posiciones correspondientes de los ceros y los polos en el plano  $z$

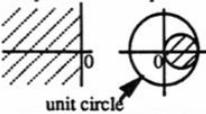
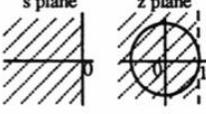
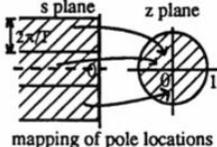
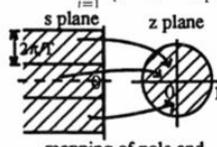
$$z_i = \frac{\frac{2}{T} + q_i}{\frac{2}{T} - q_i} \quad r_i = \frac{\frac{2}{T} + p_i}{\frac{2}{T} - p_i} \quad (5. 67)$$

Y se obtiene la función de transferencia en  $Z$  así

$$H(z) = b_0(z + 1)^L \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^M (z - r_i)} \quad (5. 68)$$

Donde el termino  $(z + 1)^L$  se origina de los ceros en el infinito.

Tabla 11: Tipos de transformaciones de análogo a digital.

Type of Transformation	Principle	Resulting mapping	Advantages	Disadvantages
Backward difference approximation	$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(n) - y(n-1)}{T}$	$s = \frac{1-z^{-1}}{T}, \quad z = \frac{1}{1-sT}$ 	1. Stable analog filter yields stable digital filter.	1. Left-half s plane is not mapped onto unit circle on z plane. Pole locations will be in the circle centered at 0.5 with radius 0.5 on the z plane.
Forward difference approximation	$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(n+1) - y(n)}{T}$	$s = \frac{z-1}{T}, \quad z = 1+sT$ 		1. Stable analog filter does not yield stable digital filter. 2. Left-half s plane is not mapped onto unit circle on z plane.
Impulse invariant method	Sample the analog impulse response: $h(n) = h_a(nT)$	Transform $H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{(s-p_i)}$ to $H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{b_i}{[1-z^{-1} \exp(p_i T)]}$ 	1. Preserve shape of impulse response. 2. Stable analog filter yields stable digital filter. 3. The analog frequency and digital frequency are linearly related, $\lambda T = 2\pi f$ , $-0.5 \leq f \leq 0.5$ .	1. Aliasing in the frequency domain (due to many-to-one mapping from s plane to z plane). $T \cdot H(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(2\pi \frac{f+k}{T}\right)$
Bilinear transformation	Approximate $y(t) = \int_{t-T}^t y'(\tau) d\tau + y(t-T)$ by $y(n) = \frac{T}{2} [y'(n) + y'(n-1)] + y(n-1)$	$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, \quad z = \frac{(2/T) + s}{(2/T) - s}$ 	1. Stable analog filter yields stable digital filter. 2. Left-half s plane is mapped onto unit circle on z plane, a one-to-one mapping.	1. Frequency warping—nonlinear relation between analog frequency and digital frequency.
Matched z transformation	Map each pole and zero on s plane directly to pole and zero on the z plane.	Transform $H_a(s) = \prod_{i=1}^N \frac{(s-q_i)}{(s-p_i)}$ to $H(z) = \prod_{i=1}^N \frac{[1-z^{-1} \exp(q_i T)]}{[1-z^{-1} \exp(p_i T)]}$ 	1. Stable analog filter yields stable digital filter.	1. Aliasing in the frequency domain (due to many-to-one mapping from s plane to z plane).

Fuente: (Chen , 2009)

### 5.3.3 Métodos directos de diseño de filtro IIR.

Los métodos directos de diseño sirven tanto para filtros AR, como MA, y en general sistemas ARMA. Estos métodos se basan en la teoría de la aproximación, imponiendo restricciones en cuanto a la desviación de la respuesta en frecuencia del filtro respecto del filtro ideal. Estos métodos son especialmente útiles cuando el filtro se debe obtener a partir de datos experimentales.

El objetivo es determinar los coeficientes del filtro digital en base a minimizar algún parámetro de diseño. El número de procedimientos existentes es muy numeroso por lo que únicamente se analizarán los más sencillos.

#### A) Aproximación de Padé

Dado un sistema con función de transferencia:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) z^{-k} \quad (5.69)$$

Se pretende obtener los  $L = M + N + 1$  coeficientes,  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$ , a partir de la minimización de algún criterio de error. Éste método se plantea minimizar la suma de los errores cuadráticos entre la respuesta impulsional ideal (deseada) y la real:

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^U [h_d(n) - h(n)]^2 \quad (5.70)$$

donde  $h_d(n)$  es la respuesta deseada del filtro y  $h(n)$  la real;  $U$  es un límite superior seleccionado por el diseñador.

En general,  $h(n)$  es una función no lineal de  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$ , sin embargo, si,  $U = N + M$ , es posible hacer coincidir perfectamente las respuestas real y deseada para  $0 \leq n \leq M + N$ .

Si se hace  $h_d(n) = h(n)$   $0 \leq n \leq M + N$ , el error cometido será:

$$\varepsilon = \sum_{n=N+M+1}^{\infty} [h_d(n) - h(n)]^2 \quad (5.71)$$

Se plantea el problema a través de la ecuación en diferencias

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (5.72)$$

Cuando se hace  $x(n) = \delta(n)$  se tiene

$$h(n) = - \sum_{k=1}^N a_k h(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k \delta(n-k) \quad (5.73)$$

Si se van dando valores a  $n$  y se tiene en cuenta que  $\delta(n-k) = 0$  a excepto para  $n = k$ , se puede plantear el sistema de ecuaciones siguiente:

$$h(n) = - \sum_{k=1}^N a_k h(n-k) \quad n > M \quad (N \text{ ecuaciones con } N \text{ incógnitas}) \quad (5.74)$$

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \dots - a_N h(n-N) + b_n \quad 0 \leq n \leq M$$

Es así que se pueden obtener los coeficientes  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$ :

1. Haciendo  $h(n) = h_d(n)$  con  $M < n \leq M + N$  se obtiene  $\{a_k\}$
2. Haciendo  $h(n) = h_d(n)$  con  $0 < n \leq M$  se obtiene  $\{b_k\}$

El cálculo de los coeficientes  $a_k$  se puede hacer matricialmente con la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} h(M+1) \\ \vdots \\ h(M+N) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h(M) & h(M-1) & \dots & h(M-N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(M+N-1) & h(M+N-2) & \dots & h(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

Matricialmente:  $\mathbf{a} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{h}_{(M+1, M+N)}$

Se puede resolver directamente al invertir la matriz  $\mathbf{H}$ . Conocidos los valores de  $a_k$ , se obtendrán los valores de  $b_n = \sum_{k=0}^M a_k h(n-k) \quad 0 \leq n \leq M$

El grado de fiabilidad de este método depende del número de coeficientes seleccionado.

Se aproxima perfectamente cuando el sistema buscado presenta una función de transferencia  $H(z)$  racional y se sabe el número de ceros y polos (orden del numerador y denominador), lo que, en la práctica resulta problemático.

**B) Aproximación por mínimos cuadrados.**

Un método alternativo para diseñar filtros IIR es afrontar el problema de la minimización de la diferencia al cuadrado entre la respuesta del filtro ideal y la real, es decir, plantear el problema de la identificación de sistemas. La figura 55 muestra dicha estructura. La idea es determinar los coeficientes del sistema  $H(z)$  de manera que colocado en cascada con el sistema que queremos modelizar obtengamos como resultado una señal  $y(n)$  que en el dominio temporal debería ser un impulso, cuando la modelización es exacta. Si se define como criterio de error la suma de  $y^2(n)$ , se pueden obtener los coeficientes imponiendo que dicho error sea mínimo.

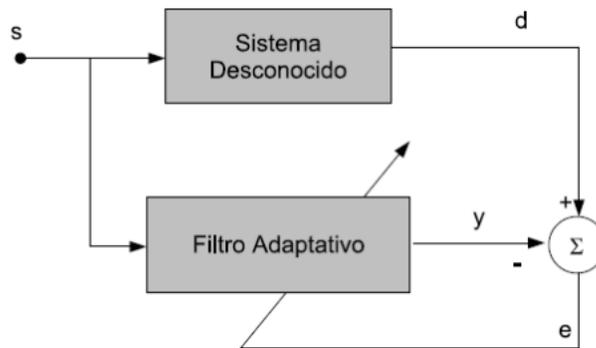


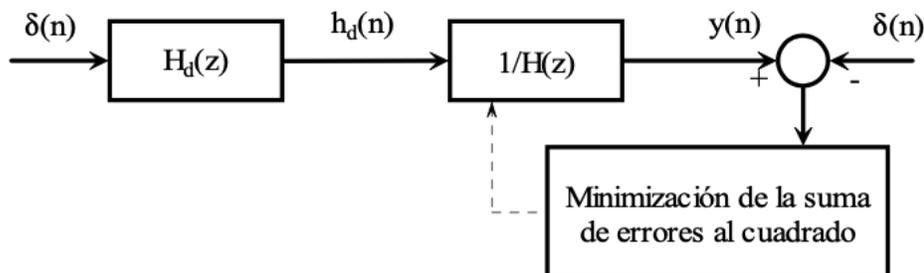
Figura 55: Sistema de Identificación

Fuente: Autor

Supóngase el caso más simple de considerar un filtro con solo polos:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \tag{5. 75}$$

Al considerar un esquema de identificación de sistemas



Donde se modifican los coeficientes del filtro  $\frac{1}{H(z)}$  para anular el efecto de  $H_d(z)$ , es decir, la salida  $y(n)$  sea lo mas parecida a la entrada  $\delta(n)$ , de forma ideal  $\left(\frac{H_d(z)}{H(z)} = 1 \text{ e } y(n) = \delta(n)\right)$

La ecuación en diferencias del sistema inverso será:

$$y(n) = \frac{1}{b_0} \left[ h_d(n) + \sum_{k=1}^N a_k h_d(n-k) \right] \quad (5.76)$$

Para  $n=0$

$$y(0) = \frac{1}{b_0} \left[ h_d(0) + \sum_{k=1}^N a_k h_d(0-k) \right] = \frac{1}{b_0} h_d(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad b_0 = h_d(0) \quad (5.77)$$

Para  $n > 0$ , la salida  $y(n)$  debe ser cero, lo que se minimizará será la suma de los errores al cuadrado

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{+\infty} y^2(n) = \frac{1}{h_d^2(0)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ h_d(n) + \sum_{k=1}^N a_k h_d(n-k) \right]^2 \quad (5.78)$$

Para que la función de error sea mínima, las derivadas parciales respecto a los coeficientes del filtro deben ser cero y las segundas derivadas mayores a cero.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_p} = 0 \quad \text{para } p = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial a_p^2} > 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_p} = \frac{1}{h_d^2(0)} \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \left[ h_d(n) + \sum_{k=1}^N a_k h_d(n-k) \right] h_d(n-p) = 0 \quad (5.79)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h_d(n) h_d(n-p) + \sum_{k=1}^N a_k \sum_{k=1}^N h_d(n-k) h_d(n-p) = 0$$

Definiendo la variable auxiliar

$$r_{dd}(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} h_d(k) h_d(k-p)$$

Se obtiene

$$-r_{dd}(p) = \sum_{k=1}^N a_k r_{dd}(p-k) \quad 1 \leq p \leq N \quad (5.80)$$

Al desarrollar la sumatoria se obtendría

$$-\begin{bmatrix} r_{dd}(1) \\ \vdots \\ r_{dd}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dd}(0) & r_{dd}(-1) & \dots & r_{dd}(-N+1) \\ r_{dd}(1) & r_{dd}(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{dd}(N-1) & r_{dd}(N-2) & \dots & r_{dd}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

De forma matricial se escribe como  $\mathfrak{R}\mathbf{a} = \mathbf{r}$

$\mathfrak{R}$  es la matriz de correlación de NxN elementos

$\mathbf{a}$  es un vector Nx1 que contiene los coeficientes del filtro

$\mathbf{r}$  es el vector de correlación con Nx1 elementos,  $\mathbf{r} = -r_{dd}(n)$

El sistema de ecuaciones se puede resolver haciendo

$$\mathbf{a} = \mathfrak{R}^{-1}\mathbf{r} \quad (5.81)$$

Se observa fácilmente que la matriz  $\mathfrak{R}$  es simétrica pues el vector de autocorrelación es simétrico.

$$r_{dd}(-l) = r_{dd}(l) \quad 0 \leq l \leq N-1$$

La expresión matricial (4.82) se denomina Ecuación de Yule-Walker y el procedimiento usado para la solución es el algoritmo de Levinson-Durbin.

## GLOSARIO

ECG	Electrocardiograma Representación gráfica de la actividad eléctrica del corazón en función del tiempo, que se obtiene, desde la superficie corporal, en el pecho, con un electrocardiógrafo en forma de cinta continua.
EEG	Electroencefalograma Es un estudio que detecta la actividad eléctrica del cerebro mediante pequeños discos metálicos (electrodos) fijados sobre el cuero cabelludo.
A/D	Convertidor analógico-digital
D/A	Convertidor digital-analógico.
TD	Retardo en el tiempo. ( <i>time-delay</i> )
FD	Operación de solapamiento. ( <i>foldng</i> )
PDS	Procesamiento Digital de señales
LTI	Sistema Lineal Invariante en el tiempo
BIBO	<i>Bounded Input - Bounded Output</i> , de entrada y salida acotadas.
FIR	Respuesta al impulso de duración Finita ( <i>Finite duration Impulse Response</i> )
IIR	Respuesta al impulso de duración Infinita ( <i>Infinite duration Impulse Response</i> )
ROC	Región de convergencia ( <i>region of convergence</i> )
AR	Modelos Autoregresivos (AutoRegressive Models)
MA	Modelos de media móvil (Moving Average models)
ARMA	modelos autorregresivos de media móvil (en inglés AutoRegressive Moving Average models)

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2007). *Tratamiento Digital de Señales*. Madrid: Prentice Hall.
- Oppenheim, A. V., & Schaffer, R. W. (2009). *Discrete-Time signal Processing*. Prentice Hall.
- Ingle, V. K., & Proakis, J. G. (2011). *Digital Signal Processing using MATLAB*. Cengage Learning.
- Lyons, R. G. (2010). *Understanding Digital Signal Processing*. Prentice Hall.
- Hayes, M. H. (1996). *Statistical digital signal processing and modeling*. John Wiley and Sons.
- Haykin, S. (1996). *Adaptive filter theory*. Prentice Hall.
- Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. (2002). *Digital Image Processing*. Addison Wesley.
- Rabiner, L. R., & Gold, B. (1975). *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Prentice Hall.
- Burrus, C. S., McClellan, J. H., Oppenheim, A. V., Parks, T. W., Schaffer, R. W., & Schuessler, H. W. (1998). *Ejercicios de tratamiento de la señal utilizando Matlab v. 4*. Prentice Hall.
- Soria, E., Martínez, M., Frances, J. V., & Camps, G. (2003). *Tratamiento digital de señales. Problemas y ejercicios resueltos*. Prentice Hall.
- Hayes, M. H. (1999). *Digital Signal Processing*. McGraw Hill.
- Bold, B. A. (1988). *De Earthquakes*. W. H. Freeman and Company.
- Paley, R., & Wiener, N. (1934). Fourier transforms in the complex domain. *AMS Coll.*
- Oppenheim, A., & Schaffer, R. (s.f.). *Discrete-time Signal Processing*.
- Chen, W. K. (2009). *The Circuits and Filters*. 3.
- Kamen, E. W., & Heck, B. S. (2008). *Fundamentos de Señales y Sistemas usando las web y MATLAB*. Mexico.: Pearson Prentice Hall.